Известия вузов. Математика
2014, №6, с. 33–47

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.П. МОЖЕЙ

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

Аннотация. Данная статья описывает инвариантные аффинные связности на псевдоримановых однородных пространствах размерности 3. Приведена локальная классификация псевдоримановых однородных пространств, эквивалентная описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную симметричную билинейную форму на изотропном модуле. Найдены все инвариантные аффинные связности на псевдоримановых однородных пространствах, их тензоры кривизны и кручения, выделены псевдоримановы связности.

Ключевые слова: инвариантная аффинная связность, псевдориманово однородное пространство.

УДК: 514.76

Данная статья является продолжением одноименной работы [1]. При изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В работе продолжается изучение связностей на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах, внимание сосредоточено на однородных пространствах, не допускающих риманову метрику. Наряду с этим в [1] были описаны двумерные римановы (псевдоримановы) однородные пространства и связности на них.

Впервые понятие связности возникло в работе Т. Леви-Чивита [2] о параллельном переносе вектора в римановой геометрии, Г. Вейль [3] ввел понятие аффинной связности, обзор дальнейшего развития теории связностей излагается в работе Ю.Г. Лумисте [4]. С. Ли впервые поставил вопрос о движениях в римановых пространствах. Классификация двумерных и трехмерных собственно римановых пространств (по группам движений) была дана еще Л. Бианки. В [5] Г.И. Кручкович получил классификацию (собственно римановых и псевдоримановых) пространств по группам движений, трехмерные пространства изучались во многих работах (например, [6], [7]).

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $(M, \overline{G})$ — однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$, где $G \subset \overline{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G}/G$.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$, в дальнейшем будем рассматривать только такие пары. Также будем полагать, что G — связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на T_xM — это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x + \mathfrak{g}) = (\operatorname{Ad} s)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра

Поступила 28.01.2012

Ли $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g} = \mathfrak{m}$ следующим образом:

$$x.(y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Изотропно-точные пространства включают в себя все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность.

Псевдориманово однородное пространство задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, где $\mathbf{g}$ — инвариантная псевдориманова метрика на M. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно однозначном соответствии с симметрическими невырожденными билинейными формами B на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ [8] такими, что

$$B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{g}, \quad v_1, v_2 \in \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}, \tag{1}$$

и каждое псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \leq 4$, описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством.* Поскольку однородное пространство допускает метрику, следовательно, и аффинную связность, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ является изотропно-точной.

1. Трехмерные псевдоримановы однородные пространства

Все трехмерные локально псевдоримановы однородные пространства, допускающие риманову метрику, найдены в [1]. Найдем локально псевдоримановы однородные пространства, не допускающие риманову метрику (только псевдориманову).

Теорема 1. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *— локально псевдориманово однородное пространство такое, что* $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ *и* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. *Оно эквивалентно одной и только одной из троек, приведенных в табл. 1, где* e_1 e_2, e_3 *— базис* $\mathfrak{g}$; u_1, u_2, u_3 *— базис подпространства, дополнительного к* $\mathfrak{g}$ *в* $\bar{\mathfrak{g}}$. *Все указанные пространства допускают метрику сигнатуры* $(1, 2)$ *и* $(2, 1)$.

Доказательство. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ найдены в [9], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Для каждой найденной пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ описываем все инвариантные билинейные формы B на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства — только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой.

Рассмотрим случай 1.1 при $\lambda = -1$, т. е.

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Таблица 1. Трехмерные локально псевдоримановы однородные пространства

<table>
<tr><th>B</th><th>Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$</th></tr>
<tr><td>$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$</td><td>1.1.1, $\lambda = -1$, $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(1,1) \rightthreetimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$,
$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} 1.1.2,\ \lambda = -1 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \end{array}$
$\begin{array}{c|cccc} 1.1.6 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, a \neq 0$</td><td>1.1.5, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1)$,
$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, ab \neq 0$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} 1.1.7,\ \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 + u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 - u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$B = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} 1.8.1,\ 1.8.4,\ 1.8.5 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & \delta e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -\delta e_1 & 0 \end{array}$, $\delta = 0, 1, -1$,
$\begin{array}{c|cccc} 1.8.3 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 + \alpha e_1 \\ u_3 & -u_2 & -u_1 & -u_2 - \alpha e_1 & 0 \end{array}$
$\begin{array}{c|ccccc} 2.21.1,\ \lambda = 0 & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>B</th><th>Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$</th></tr>
<tr><td></td><td>

3.4.1, $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,1) \rightthreetimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$,

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td>

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1, 0$

</td><td>

$$\begin{array}{c|cccc} 1.8.2,\ \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td>

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$

</td><td>

$$\begin{array}{c|ccccc} 2.21.4 & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$$

3.4.2, $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$,
$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$$

3.4.3, $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$$

</td></tr>
</table>

Тогда любая пара этого типа эквивалентна одной и только одной из пар 1.1.1, 1.1.2, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7. Действительно, пусть $\{e_1\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $[e_1, u_j]$, $1 \leqslant j \leqslant 3$ (с точностью до $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$), имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_2] = -u_2, \quad [e_1, u_1] = p_3 e_1, \quad p_3 \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,\quad [u_1,u_3]=b_1e_1+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3,$$
$$[u_2,u_3]=c_1e_1+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3.$$

Проверим тождество Якоби для троек (e_1,u_j,u_k), $1\leqslant j<k\leqslant 3$, и (u_1,u_2,u_3):

$$[e_1,[u_1,u_2]]+[u_2,[e_1,u_1]]+[u_1,[u_2,e_1]]=0,$$
$$\alpha_1u_1-\alpha_2u_2+p_3\alpha_3e_1=0\ \Rightarrow\ p_3\alpha_3=0,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=0;$$
$$[e_1,[u_1,u_3]]+[u_3,[e_1,u_1]]+[u_1,[u_3,e_1]]=0,$$
$$\beta_1u_1-\beta_2u_2+p_3\beta_3e_1+p_3u_1-(b_1e_1+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3)=0\ \Rightarrow\ b_1=0,\ p_3=0,\ \beta_2=0,\ \beta_3=0;$$
$$[e_1,[u_2,u_3]]+[u_3,[e_1,u_2]]+[u_2,[u_3,e_1]]=0,$$
$$\gamma_1u_1-\gamma_2u_2-(c_1e_1+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3)=0\ \Rightarrow\ c_1=0,\quad \gamma_1=0,\quad \gamma_3=0;$$
$$[u_1,[u_2,u_3]]+[u_3,[u_1,u_2]]+[u_2,[u_3,u_1]]=0,$$
$$(\gamma_2+\beta_1)(a_1e_1+\alpha_3u_3)=0\ \Rightarrow\ (\beta_1+\gamma_2)a_1=0,\quad (\beta_1+\gamma_2)\alpha_3=0.$$

Следовательно, пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	$a_1e_1+\alpha_3u_3$	β_1u_1
u_2	u_2	$-a_1e_1-\alpha_3u_3$	0	γ_2u_2
u_3	0	$-\beta_1u_1$	$-\gamma_2u_2$	$0,$

где $a_1(\beta_1+\gamma_2)=\alpha_3(\beta_1+\gamma_2)=0$.

Если $\beta_1+\gamma_2\neq 0$, то $a_1=\alpha_3=0$, пара эквивалентна паре 1.1.2.

Пусть теперь $\beta_1+\gamma_2=0$. Отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}'\to\bar{\mathfrak{g}}$ такое, что

$$\pi(e_1)=e_1,\quad \pi(u_1)=u_1,\quad \pi(u_2)=u_2,\quad \pi(u_3)=u_3+\beta_1e_1,$$

устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$, где последняя имеет вид

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	$a_1e_1+\alpha_3u_3$	0
u_2	u_2	$-a_1e_1-\alpha_3u_3$	0	0
u_3	0	0	0	$0.$

Если $a_1\neq 0$ и $\alpha_3\neq 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 1.1.7

$$\pi:\bar{\mathfrak{g}}_7\to\bar{\mathfrak{g}}',\quad \pi(e_1)=e_1,\quad \pi(u_1)=u_1,\quad \pi(u_2)=a_1^{-1}u_2,\quad \pi(u_3)=\alpha_3a_1^{-1}u_3.$$

Аналогично, пара $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$ эквивалентна одной из пар 1.1.5, 1.1.6 или 1.1.1, если $(a_1\neq 0,\ \alpha_3=0)$, $(a_1=0,\alpha_3\neq 0)$ или $(a_1=\alpha_3=0)$ соответственно.

Поскольку $Z(\bar{\mathfrak{g}}_1)\neq\{0\}$, а $Z(\bar{\mathfrak{g}}_2)=\{0\}$, пары 1.1.1 и 1.1.2 не эквивалентны.

Заметим, что $D^2\bar{\mathfrak{g}}_1=D^2\bar{\mathfrak{g}}_2=\{0\}$, но $D^2\bar{\mathfrak{g}}_i\neq\{0\}$ для $i=5,6,7$. Следовательно, пары 1.1.1 и 1.1.2 не эквивалентны любой из пар 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7. Поскольку

$$D\bar{\mathfrak{g}}_5\cap\mathfrak{g}_5\neq\{0\},\quad D\bar{\mathfrak{g}}_5\cap Z(\bar{\mathfrak{g}}_5)=\{0\};$$
$$D\bar{\mathfrak{g}}_6\cap\mathfrak{g}_6=\{0\},\quad D\bar{\mathfrak{g}}_6\cap Z(\bar{\mathfrak{g}}_6)\neq\{0\};$$
$$D\bar{\mathfrak{g}}_7\cap\mathfrak{g}_7=\{0\},\quad D\bar{\mathfrak{g}}_7\cap Z(\bar{\mathfrak{g}}_7)=\{0\},$$

пары 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7 не эквивалентны друг другу.

Рассмотрим случай 1.8, тогда любая пара этого типа эквивалентна одной и только одной из пар 1.8.1, 1.8.2, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5. Действительно, пусть $\{e_1\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда векторы $[e_1, u_j], 1 \leq j \leq 3$ (с точностью до $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$), имеют вид

$$[e_1, u_1] = pe_1, \quad [e_1, u_2] = u_1, \quad [e_1, u_3] = u_2.$$

Проверив тождество Якоби для троек (e_1, u_i, u_j), $1 \leq i < j \leq 3$, и (u_1, u_2, u_3), получаем, что пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	$\alpha_1 u_1$	$\gamma_2 u_1 + \alpha_1 u_2$
u_2	$-u_1$	$-\alpha_1 u_1$	0	A
u_3	$-u_2$	$-\gamma_2 u_1 - \alpha_1 u_2$	$-A$	$0,$

где $A = c_1 e_1 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \alpha_1 u_3$, $\alpha_1 \gamma_2 = 0$.

Отображение $\pi : \overline{\mathfrak{g}}' \to \overline{\mathfrak{g}}$,

$$\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = u_3 + \gamma_1 e_1,$$

установит эквивалентность пар $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\overline{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет вид

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	$\alpha_1 u_1$	$\gamma_2 u_1 + \alpha_1 u_2$
u_2	$-u_1$	$-\alpha_1 u_1$	0	$c_1 e_1 + \gamma_2 u_2 + \alpha_1 u_3$
u_3	$-u_2$	$-\gamma_2 u_1 - \alpha_1 u_2$	$-c_1 e_1 - \gamma_2 u_2 - \alpha_1 u_3$	$0,$

$\alpha_1 \gamma_2 = 0$.

Если $\alpha_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, то пара $(\overline{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 1.8.3 при помощи отображения $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_3 \to \overline{\mathfrak{g}}'$, где

$$\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_i) = \frac{1}{\gamma_2} u_i, 1 \leq i \leq 3, \quad \alpha = \frac{c_1}{\gamma_2^2}.$$

Пары 1.8.3 и 1.8.3$'$ с параметрами α и α' при $\alpha \neq \alpha'$ не эквивалентны.

Если $\alpha_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$, то пара $(\overline{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 1.8.2 при помощи отображения $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_2 \to \overline{\mathfrak{g}}'$, где

$$\pi(e_1) = \frac{1}{\alpha_1} e_1, \quad \pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1^2} u_1, \quad \pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1} u_2, \quad \pi(u_3) = u_3 + \frac{c_1}{\alpha_1} e_1 - \frac{c_1}{2\alpha_1^2} u_1.$$

Пусть $\alpha_1 = \gamma_2 = 0$.

При $c_1 = 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна тривиальной паре 1.8.1.

При $c_1 > 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 1.8.4 при помощи отображения $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_4 \to \overline{\mathfrak{g}}'$, где

$$\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{c_1}} u_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

При $c_1 < 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 1.8.5 при помощи отображения $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_5 \to \overline{\mathfrak{g}}'$, где

$$\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{-c_1}} u_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Теперь остается показать, что указанные пары не эквивалентны друг другу.

Поскольку $\dim D\overline{\mathfrak{g}}_4 \neq \dim D\overline{\mathfrak{g}}_1$, пары 1.8.4 и 1.8.1 не эквивалентны. Аналогично, поскольку $\dim D\overline{\mathfrak{g}}_5 \neq \dim D\overline{\mathfrak{g}}_1$, пары 1.8.5 и 1.8.1 не эквивалентны.

Алгебра $\overline{\mathfrak{g}}_4/Z(\overline{\mathfrak{g}}_4)$ содержит одномерный идеал, в то время как алгебра $\overline{\mathfrak{g}}_5/Z(\overline{\mathfrak{g}}_5)$ не содержит одномерных идеалов. Следовательно, пары 1.8.5 и 1.8.4 не эквивалентны.

Поскольку $\dim Z(\overline{\mathfrak{g}}_1) = \dim Z(\overline{\mathfrak{g}}_4) = \dim Z(\overline{\mathfrak{g}}_5) = 1 \neq \dim Z(\overline{\mathfrak{g}}_3) = \dim Z(\overline{\mathfrak{g}}_2) = 0$, ни одна из пар 1.8.1, 1.8.4 и 1.8.5 не эквивалентна ни одной из пар 1.8.2 или 1.8.3.

Поскольку $\dim D^2\overline{\mathfrak{g}}_2 \neq \dim D^2\overline{\mathfrak{g}}_3$, пары 1.8.2 и 1.8.3 не эквивалентны.

Рассмотрим случай 2.21 ($\lambda = 0$), тогда любая пара этого типа эквивалентна одной и только одной из пар 2.21.1, 2.21.4. Действительно, пусть $\{e_1, e_2\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, \;\; U^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1, \;\; \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, \;\; U^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2, \;\; U^{(-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3,$$

отсюда (с учетом тождества Якоби) следует

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	$\alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_2$
u_2	-0	$-u_1$	$-\alpha_1 u_1$	0	$\alpha_1 u_3$
u_3	u_3	$-u_2$	$-\alpha_1 u_2$	$-\alpha_1 u_3$	$0.$

При $\alpha_1 \neq 0$ отображение $\pi : \overline{\mathfrak{g}}_4 \to \overline{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_1) = e_1, \;\; \pi(e_2) = e_2, \;\; \pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1}u_1, \;\; \pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1}u_2, \;\; \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_1}u_3,$$

установит эквивалентность пар $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 2.21.4. При $\alpha_1 = 0$ пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна (2.21.1).

Рассмотрим случай 3.4, тогда любая пара этого типа эквивалентна одной и только одной из пар 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3. Действительно, пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Заметив, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, имеем

$$\overline{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \times U^{\alpha}(\mathfrak{h}) \;\; \text{для всех} \;\; \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

Таким образом,

$$\overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_2, \quad \overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_1, \quad \overline{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_3,$$

$$[u_1, u_2] \in \overline{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}), \quad [u_1, u_3] \in \overline{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}), \quad [u_2, u_3] \in \overline{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}),$$

тогда

$$[u_1, u_2] = a_2 e_2 + \alpha_1 u_1, \quad [u_1, u_3] = b_1 e_1 + \beta_2 u_2, \quad [u_2, u_3] = c_3 e_3 + \gamma_3 u_3.$$

Использовав тождество Якоби, получим, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$a_2e_2+\alpha_1u_1$	$-a_2e_1+\alpha_1u_2$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-a_2e_2-\alpha_1u_1$	0	$-a_2e_3+\alpha_1u_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	$a_2e_1-\alpha_1u_2$	$a_2e_3-\alpha_1u_3$	$0.$

Положим $p = a_2 + \alpha_1^2/4$.

При $p = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 3.4.1 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$,

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = u_1 - \frac{\alpha_1}{2}e_2, \quad \pi(u_2) = u_2 + \frac{\alpha_1}{2}e_1, \quad \pi(u_3) = u_3 + \frac{\alpha_1}{2}e_3.$$

При $p > 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.4.2 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = (u_1 - \frac{\alpha_1}{2}e_2)/\sqrt{p},$$

$$\pi(u_2) = (u_2 + \frac{\alpha_1}{2}e_1)/\sqrt{p}, \quad \pi(u_3) = (u_3 + \frac{\alpha_1}{2}e_3)/\sqrt{p}.$$

При $p < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.4.3 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = -p(u_1 - \frac{\alpha_1}{2}e_2)/\sqrt{-p},$$

$$\pi(u_2) = (u_2 + \frac{\alpha_1}{2}e_1)/\sqrt{-p}, \quad \pi(u_3) = (u_3 + \frac{\alpha_1}{2}e_3)/\sqrt{-p}.$$

Поскольку $\dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $\dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3)$, пара 3.4.1 не эквивалентна парам 3.4.2 и 3.4.3. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_3$ — простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$), пары 3.4.2 и 3.4.3 не эквивалентны.

Теперь для каждой пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ опишем все инвариантные билинейные формы B на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ и выберем пары, допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $\operatorname{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Рассмотрим, например, пару 1.1.1. Проверка условия (1) дает

$$B([e_1,u_1],u_1) + B(u_1,[e_1,u_1]) = 0 \;\Rightarrow\; B(u_1,u_1) = 0,$$
$$B([e_1,u_1],u_3) + B(u_1,[e_1,u_3]) = 0 \;\Rightarrow\; B(u_1,u_3) = 0,$$
$$B([e_1,u_2],u_2) + B(u_2,[e_1,u_2]) = 0 \;\Rightarrow\; B(u_2,u_2) = 0,$$
$$B([e_1,u_2],u_3) + B(u_2,[e_1,u_3]) = 0 \;\Rightarrow\; B(u_2,u_3) = 0$$

(для остальных базисных векторов условие выполняется). Таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0.$$

Найдем группу $\operatorname{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, учитывая, что $\mathbb{R}u_3$ — центр, $\mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ — коммутант, а $\mathbb{R}e_1$ — подалгебра,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \middle|\, x,y,z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Эта группа индуцирует преобразование на множестве всех симметрических билинейных форм

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & axy & 0 \\ axy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bz^2 \end{pmatrix}.$$

Видно, что форма B может быть приведена к виду, представленному в теореме.

Для остальных пар рассуждения аналогичны. □

2. Связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (например, [10]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Все указанные выше локально псевдоримановы однородные пространства $\operatorname{codim} \mathfrak{g} = 3$ являются редуктивными (так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ для всех указанных выше пар; это верно для любого пространства, на котором существует инвариантная невырожденная билинейная форма, в частности, любое псевдориманово пространство является редуктивным). Следовательно, геодезические будут совпадать с геодезическими канонической связности при $\Lambda(x)x = 0$ для любого $x \in \mathfrak{m}$ ([8]). Такая связность на редуктивном однородном пространстве всегда существует, причем единственная (так называемая *естественная связность без кручения*), и задается соотношением $\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}}$ для всех $x, y \in \mathfrak{m}$. *Риманова* (*псевдориманова*) *связность*, соответствующая форме B, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}} + u(x, y), \quad \text{где} \quad 2B(u(x, y), z) = B(x, [z, y]_{\mathfrak{m}}) + B([z, x]_{\mathfrak{m}}, y)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *связностью Леви-Чевита*. При выполнении условия

$$B(x, [z, y]_{\mathfrak{m}}) + B([z, x]_{\mathfrak{m}}, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y, z \in \mathfrak{m}$$

риманова (псевдориманова) связность для B совпадает с естественной связностью без кручения, а соответствующее пространство является *естественно редуктивным*. Все естественно редуктивные пространства являются *геодезически орбитальными пространствами* (все максимальные геодезические являются однородными), более того, в размерности не более 5 верно и обратное утверждение [11].

Для каждого из указанных выше локально псевдоримановых однородных пространств $\operatorname{codim} \mathfrak{g} = 3$ найдем инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, а также определим, при каких условиях связность будет являться естественной связностью без кручения, выпишем также, при каких условиях инвариантная аффинная связность задает псевдориманову связность, когда псевдориманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, а соответствующее пространство является естественно редуктивным (геодезически орбитальным).

Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ — изотропное представление подалгебры, связность однозначно определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, выпишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а кручения T — его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *— трехмерное локально псевдориманово однородное пространство, выписанное в теореме* 1.

I. *Аффинные связности на этих пространствах, их тензоры кривизны и кручения имеют следующий вид.*

3.4.1, 3.4.2, 3.4.3. *Связность*

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix};$$

тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-\delta & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2+\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-\delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2+\delta & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2+\delta & 0 \end{pmatrix},$$

$\delta = 0$ *для* 3.4.1, $\delta = 1$ *для* 3.4.2, $\delta = -1$ *для* 3.4.3; *тензор кручения*

$$(2p_{1,2}, 0, 0), \quad (0, 2p_{1,2}, 0), \quad (0, 0, 2p_{1,2}).$$

2.21.1, 2.21.4. *Связность совпадает с выписанной в случае* 3.4.1; *тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2 - \delta p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 - \delta p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2 + \delta p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 - \delta p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2 + \delta p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2 + \delta p_{1,2} & 0 \end{pmatrix};$$

тензор кручения

$$(2\,p_{1,2} - \delta, 0, 0), \quad (0, 2\,p_{1,2} - \delta, 0), \quad (0, 0, 2\,p_{1,2} - \delta),$$

$\delta = 0$ *для* 2.21.1, $\delta = 1$ *для* 2.21.4.

1.8.1, 1.8.4, 1.8.5. *Связность*

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}+p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1}+q_{1,2} & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1}+2\,q_{1,2}+p_{1,3} \end{pmatrix};$$

тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2 & 3\,p_{1,3}\,p_{1,2} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2 & p_{1,2}\,q_{1,2}-p_{1,3}\,p_{1,2} & p_{1,2}\,q_{1,3}+2\,p_{1,3}\,q_{1,2}+{p_{1,3}}^2 \\ 0 & 0 & p_{1,2}\,q_{1,2}+2\,p_{1,3}\,p_{1,2} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}\,q_{1,2} & -r_{1,2}\,p_{1,2}+{q_{1,2}}^2-p_{1,2}\,q_{1,3}-\delta & -2\,p_{1,2}\,r_{1,3}+3\,q_{1,2}\,q_{1,3}+q_{1,3}\,p_{1,3}-r_{1,2}\,p_{1,3} \\ -{p_{1,2}}^2 & -p_{1,3}\,p_{1,2} & {q_{1,2}}^2+2\,p_{1,3}\,q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-r_{1,2}\,p_{1,2}-\delta \\ 0 & -{p_{1,2}}^2 & (q_{1,2}+p_{1,3})\,p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$\delta = 0$ *для* 1.8.1, $\delta = 1$ *для* 1.8.4, $\delta = -1$ *для* 1.8.5; *тензор кручения*

$$(2\,p_{1,\,2},\,0,\,0)\,,\,(p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\,2\,p_{1,\,2},\,0)\,,\,(q_{1,\,3}-r_{1,\,2},\,p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\,2\,p_{1,\,2})\,.$$

1.8.2. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.8.1; *тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} & 3p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & q_{1,2}p_{1,2}-p_{1,3}p_{1,2}-q_{1,2} & p_{1,2}q_{1,3}+2p_{1,3}q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}p_{1,2}+2p_{1,3}p_{1,2}-q_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{1,2}-r_{1,1} & -r_{1,2}p_{1,2}+{q_{1,2}}^2-p_{1,2}q_{1,3}-r_{1,2} & -2p_{1,2}r_{1,3}+3q_{1,2}q_{1,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3} \\ -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & -p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}-q_{1,2} & {q_{1,2}}^2+2p_{1,3}q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2}-q_{1,3} \\ 0 & -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & q_{1,2}p_{1,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}-2q_{1,2}-p_{1,3} \end{pmatrix};$$

тензор кручения

$$(2\,p_{1,\,2}-1,\,0,\,0)\,,\,(p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\,2\,p_{1,\,2}-1,\,0)\,,\,(q_{1,\,3}-r_{1,\,2},\,p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\,2\,p_{1,\,2}-1)\,.$$

1.8.3. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.8.1; *тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2 & 3p_{1,3}p_{1,2} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2 & p_{1,2}q_{1,2}-p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,2} & p_{1,2}q_{1,3}+2p_{1,3}q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}q_{1,2}+2p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,2} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}q_{1,2}+p_{1,2} & -r_{1,2}p_{1,2}+{q_{1,2}}^2-p_{1,2}q_{1,3}-\alpha-q_{1,2} & -2p_{1,2}r_{1,3}+3q_{1,2}q_{1,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-q_{1,3} \\ -{p_{1,2}}^2 & -p_{1,3}p_{1,2} & {q_{1,2}}^2+2p_{1,3}q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-r_{1,2}p_{1,2}-\alpha-q_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & -{p_{1,2}}^2 & p_{1,2}q_{1,2}+p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,2} \end{pmatrix};$$

тензор кручения

$$(\,2\,p_{1,\,2},\,0,\,0\,)\,,\,(\,p_{1,\,3}-r_{1,\,1}-1,\,2\,p_{1,\,2},\,0\,)\,,\,(\,q_{1,\,3}-r_{1,\,2},\,p_{1,\,3}-r_{1,\,1}-1,\,2\,p_{1,\,2}\,)\,.$$

1.1.1, 1.1.5. *Связность*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,\,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,\,2} & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,\,3} \\ q_{3,\,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r_{1,\,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,\,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,\,3} \end{pmatrix};$$

тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} p_{1,\,3}\,q_{3,\,1}-\delta & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,\,2}\,q_{2,\,3}+\delta & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,\,2}\,q_{2,\,3}-p_{1,\,3}\,q_{3,\,1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,\,3}\,r_{3,\,3}-r_{1,\,1}\,p_{1,\,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,\,2}\,r_{2,\,2}-r_{3,\,3}\,p_{3,\,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,\,3}\,r_{3,\,3}-r_{2,\,2}\,q_{2,\,3} \\ q_{3,\,1}\,r_{1,\,1}-r_{3,\,3}\,q_{3,\,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\delta = 0$ *для* 1.1.1, $\delta = 1$ *для* 1.1.5; *тензор кручения*

$$(0,\,0,\,p_{3,\,2}-q_{3,\,1})\,,\,(p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\,0,\,0)\,,\,(0,\,q_{2,\,3}-r_{2,\,2},\,0)\,.$$

1.1.2. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.1.1; *тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} p_{1,3}\,q_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}\,q_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}\,q_{2,3}-p_{1,3}\,q_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}\,r_{3,3}-r_{1,1}\,p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}\,r_{2,2}-r_{3,3}\,p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}\,r_{3,3}-r_{2,2}\,q_{2,3}-q_{2,3} \\ q_{3,1}\,r_{1,1}-r_{3,3}\,q_{3,1}-q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тензор кручения $(0,\,0,\,p_{3,2}-q_{3,1})$, $(p_{1,3}-r_{1,1},\,0,\,0)$, $(0,\,q_{2,3}-r_{2,2}-1,\,0)$.

1.1.6, 1.1.7. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.1.1; *тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} p_{1,3}\,q_{3,1}-r_{1,1}-\delta & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}\,q_{2,3}-r_{2,2}+\delta & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}\,q_{2,3}-p_{1,3}\,q_{3,1}-r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}\,r_{3,3}-r_{1,1}\,p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}\,r_{2,2}-r_{3,3}\,p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}\,r_{3,3}-r_{2,2}\,q_{2,3} \\ q_{3,1}\,r_{1,1}-r_{3,3}\,q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\delta=0$ *для* 1.1.6, $\delta=1$ *для* 1.1.7; *тензор кручения*

$$(0,\,0,\,p_{3,2}-q_{3,1}-1),\,(p_{1,3}-r_{1,1},\,0,\,0),\,(0,\,q_{2,3}-r_{2,2},\,0).$$

II. *Естественную связность без кручения получим при* $p_{1,2}=0$ *в случаях* 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 2.21.1, *при* $p_{1,2}=1/2$ *в случае* 2.21.4, *при равенстве нулю всех параметров в случаях* 1.8.1, 1.8.4, 1.8.5, 1.1.1, 1.1.5. *Псевдориманова связность во всех указанных случаях* (*а также в случае* 1.8.2 *при* $\varepsilon=0$ *в билинейной форме* B) *совпадает с естественной связностью без кручения, пространство во всех указанных случаях является естественно редуктивным.*

В остальных случаях псевдориманова связность не совпадает с естественной связностью без кручения. Укажем в табл. 2 *только отличные от нуля параметры.*

Таблица 2

Номер	*Естественная связность без кручения*	*Псевдориманова связность*
1.8.2	$p_{1,2}=\frac{1}{2}$,	$p_{1,2}=\frac{1}{2}$, $q_{1,3}=r_{1,2}=-\frac{\varepsilon}{2a}$,
1.8.3	$p_{1,3}=\frac{1}{2}$, $r_{1,1}=-\frac{1}{2}$,	$q_{1,2}=-r_{1,1}=1$,
1.1.2	$q_{2,3}=\frac{1}{2}$, $r_{2,2}=-\frac{1}{2}$,	$q_{2,3}=p_{1,3}=r_{1,1}=-r_{2,2}=\frac{1}{2}$, $p_{3,2}=q_{3,1}=-\frac{1}{2a}$,
1.1.6	$p_{3,2}=\frac{1}{2}$, $q_{3,1}=-\frac{1}{2}$,	$p_{3,2}=-q_{3,1}=\frac{1}{2}$, $q_{2,3}=-p_{1,3}=-r_{1,1}=r_{2,2}=\frac{a}{2}$,
1.1.7	$p_{3,2}=\frac{1}{2}$, $q_{3,1}=-\frac{1}{2}$,	$p_{3,2}=-q_{3,1}=\frac{1}{2}$, $q_{2,3}=-p_{1,3}=-r_{1,1}=r_{2,2}=\frac{b}{2a}$.

Доказательство. Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}\in\mathbb{R}$, $i,j=1,2,3$.

Рассмотрим локально однородное пространство 3.4.1, выписанное в теореме 1, тогда

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \Lambda(e_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda(e_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1]) \;\Rightarrow\; [\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1),$$

$$\begin{pmatrix}-p_{1,1}&0&p_{1,3}\\-2p_{2,1}&-p_{2,2}&0\\-3p_{3,1}&-2p_{3,2}&-p_{3,3}\end{pmatrix}=0.$$

Получаем $p_{1,1}=0$, $p_{1,3}=0$, $p_{2,1}=0$, $p_{2,2}=0$, $p_{3,1}=0$, $p_{3,2}=0$, $p_{3,3}=0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1]) \;\Rightarrow\; [\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=0,$$

$$\begin{pmatrix}0&0&p_{2,3}-p_{1,2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0.$$

Поэтому $p_{2,3}=p_{1,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1]) \;\Rightarrow\; [\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_2)$,

$$\begin{pmatrix}-p_{1,2}-q_{1,1}&-q_{1,2}&-q_{1,3}\\-q_{2,1}&-q_{2,2}&-q_{2,3}\\-q_{3,1}&-q_{3,2}&p_{1,2}-q_{3,3}\end{pmatrix}=0.$$

Следовательно, $q_{1,1}=-p_{1,2}$, $q_{1,2}=q_{1,3}=q_{2,1}=q_{2,2}=0$, $q_{2,3}=0$, $q_{3,1}=0$, $q_{3,2}=0$, $q_{3,3}=p_{1,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda([e_3,u_2]) \;\Rightarrow\; [\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_3)$, получаем $r_{1,1}{=}r_{1,2}{=}r_{1,3}{=}0$, $r_{2,1}=-p_{1,2}$, $r_{2,2}=0$, $r_{3,2}=-p_{1,2}$, $r_{2,3}=r_{3,1}=r_{3,3}=0$. Условия

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=-\Lambda(u_3),\quad [\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1),\quad [\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0,$$
$$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2),\quad [\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=0$$

выполняются. Таким образом,

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&0\\0&0&p_{1,2}\\0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}-p_{1,2}&0&0\\0&0&0\\0&0&p_{1,2}\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{1,2}&0&0\\0&-p_{1,2}&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)-0=\widetilde{\Lambda}(u_1),$$
$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-0=\widetilde{\Lambda}(u_2)$$
$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-0=\widetilde{\Lambda}(u_3),$$

причем $\widetilde{\Lambda}(u_k)$ получены из $\Lambda(u_k)$ заменой p_{12} на p_{12}^2 $(k=1,2,3)$. Тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak{m}}-[u_1,u_2]_{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix}2p_{1,2}&0&0\end{pmatrix},$$
$$T(u_1,u_3)=\Lambda(u_1)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_1)_{\mathfrak{m}}-[u_1,u_3]_{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix}0&2p_{1,2}&0\end{pmatrix},$$
$$T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}}-[u_2,u_3]_{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix}0&0&2p_{1,2}\end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы полученная связность являлась естественной связностью без кручения, требуется $\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}}=\frac{1}{2}[u_1,u_2]_{\mathfrak{m}}$, следовательно, $p_{1,2}=0$. Риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, так как $[u_i,u_j]=0$ для всех $i,j=1,2,3$ и

$$B(u_i,[u_j,u_k]_{\mathfrak{m}})+B([u_j,u_i]_{\mathfrak{m}},u_k)=0 \text{ для всех } i,j,k=1,2,3.$$

Таким образом, пространство является естественно редуктивным. По аналогии рассматриваются случаи 3.4.2 и 3.4.3.

Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ — локально однородное пространство 2.21.4, выписанное в теореме 1,

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_i), \Lambda(u_j)] = \Lambda([e_i, u_j])$ для $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. Прямыми вычислениями получаем, что связность, тензоры кривизны и кручения имеют вид, указанный в теореме. Чтобы полученная связность являлась естественной связностью без кручения, требуется $\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[u_1, u_2]_{\mathfrak{m}}$, следовательно, $p_{1,2} = 1/2$. Случай 2.21.1 рассматривается аналогично.

Пусть далее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ — локально однородное пространство 1.8.1, выписанное в теореме 1, тогда по аналогии доказывается, что связность, тензоры кривизны и кручения имеют вид, указанный в теореме. Пусть

$$F(x, y, z) = 2B(u(x, y), z) - B(x, [z, y]_{\mathfrak{m}}) - B([z, x]_{\mathfrak{m}}, y), \quad \text{где} \quad u(x, y) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}}.$$

Найдем псевдориманову связность из условий

$F(u_1, u_2, u_3) = 0 \Rightarrow 2p_{1,2} = 0,$ $F(u_1, u_3, u_3) = 0 \Rightarrow 2p_{1,3} = 0,$
$F(u_2, u_2, u_3) = 0 \Rightarrow 2q_{1,2} = 0,$ $F(u_2, u_3, u_3) = 0 \Rightarrow 2q_{1,3} = 0,$
$F(u_3, u_1, u_3) = 0 \Rightarrow 2r_{1,1} = 0,$ $F(u_3, u_2, u_3) = 0 \Rightarrow 2r_{1,2} = 0,$
$F(u_3, u_3, u_3) = 0 \Rightarrow 2r_{1,3} = 0.$

Псевдориманову связность получим при равенстве нулю всех параметров. Пусть

$$F_2(u_i, u_j) = \Lambda(u_i)(u_j)_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Естественную связность без кручения находим из условий

$F_2(u_1, u_2) = 0 \Rightarrow p_{1,2} = 0,$ $F_2(u_1, u_3) = 0 \Rightarrow p_{1,3} = 0,$ $F_2(u_2, u_2) = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 0,$
$F_2(u_2, u_3) = 0 \Rightarrow q_{1,3} = 0,$ $F_2(u_3, u_1) = 0 \Rightarrow r_{1,1} = 0,$ $F_2(u_3, u_2) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0,$
$F_2(u_3, u_3) = 0 \Rightarrow r_{1,3} = 0.$

Естественную связность без кручения получим при равенстве нулю всех параметров, псевдориманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство является естественно редуктивным.

Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ — локально однородное пространство 1.8.2, выписанное в теореме 1, тогда по аналогии доказывается, что связность, тензоры кривизны и кручения имеют вид, указанный в теореме. Найдем псевдориманову связность из условий

$F(u_1, u_2, u_3) = 0 \Rightarrow (2p_{1,2} - 1)a = 0,$ $F(u_1, u_3, u_3) = 0 \Rightarrow 2p_{1,3}a = 0,$
$F(u_2, u_2, u_3) = 0 \Rightarrow 2q_{1,2}a = 0,$ $F(u_2, u_3, u_3) = 0 \Rightarrow 2q_{1,3}a + 2\varepsilon p_{1,2} = 0,$
$F(u_3, u_1, u_3) = 0 \Rightarrow 2r_{1,1}a = 0,$ $F(u_3, u_2, u_3) = 0 \Rightarrow 2r_{1,2}a - 2\varepsilon p_{1,2} + 2\varepsilon = 0,$
$F(u_3, u_3, u_3) = 0 \Rightarrow 2r_{1,3}a + 2\varepsilon r_{1,1} + 4\varepsilon q_{1,2} + 2\varepsilon p_{1,3} = 0.$

Псевдориманову связность получаем при $p_{1,2} = 1/2$, $q_{1,3} = r_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2a}$ (остальные параметры равны нулю). Естественную связность без кручения получим при $p_{1,2} = 1/2$ и равенстве нулю остальных параметров. Псевдориманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, а пространство является естественно редуктивным только при $\varepsilon = 0$.

Для остальных локально однородных пространств рассуждения аналогичны. $\square$

Полученные результаты позволяют провести классификацию всех локально однородных аффинных связностей на трехмерных пространствах. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Комракову Борису Петровичу за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

[1] Можей Н.П. *Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах.* I, Изв. вузов. Матем., № 12, 51–68 (2013).

[2] Levi-Civita T. *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, Rend. Circ. Mat. Palermo **42**, 173–205 (1917).

[3] Weyl H. *Raum, Zeit, Materie* (Springer, 1970).

[4] Лумисте Ю.Г. *Теория связностей в расслоенных пространствах*, Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия (ВИНИТИ АН СССР, М., 1971), с. 123–168.

[5] Кручкович Г.И. *Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений*, УМН **9** (1), 3–40 (1954).

[6] Thurston W. *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6**, 357–381 (1982).

[7] Scott P. *The geometries of* 3*-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15**, part 5 (56), 401–487 (1983).

[8] Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry* (N.Y.–London, 1963), V. I, (N.Y.–London, 1969), V. II.

[9] Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces*, Preprints № 35–37 (Univ. Oslo, 1993).

[10] Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1), 33–65 (1954).

[11] Kowalski O. *Riemannian manifolds with homogeneous geodesics*, Boll. Unione Math. Ital. VII. Ser. B **5** (1), 189–246 (1991).

Н.П. Можей

доцент, докторант КФУ,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: mozheynatalya@mail.ru

N.P. Mozhey

Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. II

Abstract. This paper describes all invariant affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces of dimension 3. We present complete local classification of pseudo-Riemannian homogeneous spaces. It is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras supplied with an invariant nondegenerate symmetric bilinear form on the isotropy module. We describe all invariant affine connections on pseudo-Riemannian homogeneous spaces together with their curvature and torsion tensors, and choose pseudo-Riemannian connections.

Keywords: invariant affine connection, pseudo-Riemannian homogeneous spaces.

N.P.Mozhey

Associate Professor,
Doctor's Degree Worker of Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: mozheynatalya@mail.ru