Можей Н. П.,
кандидат физико-математических наук, доцент, УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск, Республика Беларусь

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Теория геодезических представляет собой один из основных разделов римановой геометрии. Она имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях [см.: 1]. В геометрии тех пространств, где метрика считается заданной, геодезические линии определяют как кратчайшие линии на поверхности. Исследование геодезических сопряжено с необходимостью исследования и решения систем дифференциальных уравнений, что ограничивает возможности применения аналитических методов и вынуждает прибегать к компьютерным методам исследования. Наиболее эффективное решение задачи нахождения геодезических возможно в системах компьютерной математики, в частности в системе Maple. Maple незаменим как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически, так и для поиска методов решения. Работа посвящена нахождению геодезических на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах с использованием пакета Maple. Вначале была получена локальная классификация трехмерных псевдоримановых однородных пространств как пар алгебр Ли. Далее для каждой такой пары вычисляем геодезические (используем пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor). Пусть, например, алгебра четырехмерна, а ее таблица умножения [[e1, e2] = e2, [e1, e3] = -e3]. Сначала определим по алгебре локальные координаты группы Ли G, (функция LeftMultiplication): [$x1 = a1 + x1\ e^{-a3}$; $x2 = a2 + x2\ e^{a3}$; x3 = x3 + a3; x4 = x4 + a4]. Обозначим многообразие M с координатами [x, y, z]. Действие G на M: [$x = a1 + x\ e^{-a3}$; $y = a2 + y\ e^{a3}$; z = z + a4]. Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на M: [D_x; D_y; $-xD_x + yD_y$; D_z], т. е. алгебра Ли совпадает с исходной. Подалгебра изотропии (IsotropySubalgebra) имеет вид: [$-xD_x + yD_y$]. Инвариантная невырожденная метрика на M: g = dx dy + dy dx + b dz dz. Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга (KillingVectors) для метрики. Получим полную алгебру инфинитеземальных изометрий метрики g:

$$[-zD_x + yD_z / b;\ D_z / b;\ -z\ D_y + xD_z / b;\ xD_x - y\ D_y;\ D_x;\ D_y].$$

Кривизна (CurvatureTensor) в координатах: $R = 0D_x\ dx\ dx\ dx$, первая ковариантная производная кривизны (CovariantDerivative): $R1 = 0D_x\ dx\ dx\ dx\ dx$, т. е. метрика постоянной кривизны, она является конформно плоской (CottonTensor): $0D_x\ D_x$, тензор кручения (TorsionTensor): $0\ dx\ D_x\ dx$.

Пусть ∇ — линейная связность на M. Если [x(t); y(t); z(t)] — кривая на M, то уравнения геодезических относительно связности — это система ОДУ второго порядка. Найдем вектор (GeodesicEquations), компоненты которого — компоненты уравнений на геодезические:

$$(d^2 / dt^2\ x(t))D_x + (d^2 / dt^2\ y(t))D_y + (d^2 / dt^2\ z(t))D_z.$$

Коэффициенты этого вектора задают систему 2 ОДУ второго порядка, решив которую (dsolve) мы получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_5\ t + C_6;\ y(t) = C_3\ t + C_4;\ z(t) = C_1\ t + C_2\}$$

Также библиотека plots системы Maple предоставляет возможности построения трехмерной динамической компьютерной модели геодезических, оснащенной цифровым и графическим сопровождением.

Список литературы:

1. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М., 1989. — 472 с.