КРИВИЗНА ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Можей Н. П. *(г. Минск, БГТУ, кафедра высшей математики)*

The aim of this paper is to describe curvatures of invariant metrics on pseudo-Riemannian homogeneous spaces in dimension 3. We present complete local classification of pseudo-Riemannian homogeneous spaces. It is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras supplied with an invariant symmetric bilinear form on the isotropy module.

Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой - кривизной. Пусть M – многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор точки $x \in M$. Пусть $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а g – подалгебра, соответствующая подгруппе G, проблема классификации однородных пространств сводится к классификации пар. Отображение ρ: $g \to gl(\bar{g}/g)$, $x \mapsto \mathrm{ad}|_{\bar{g}/g}x$ называется *изотропным представлением* подалгебры g. Рcalled Риманово однородное пространство задается тройкой ($\bar{G}$, M, ρ), где ρ - инвариантная риманова метрика на M. Метрики ρ находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на g-модуле $\bar{g}/g$. Поскольку метрика определяет связность, g-модуль $\bar{g}/g$ точен. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные римановы пространства - только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Получим, что все локально римановы однородные пространства сопряжены одному и только одному из следующих:

	Таблица умножения		Таблица умножения
1.3.1	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	1.3.6	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
1.3.2	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 & -u_2 & 0 \end{array}$	1.3.7	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
1.3.3	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \end{array}$	3.5.1	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \end{array}$

	e_1	u_1	u_2	u_3
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0

1.3.4

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
u_3	0	0	0	0

3.5.2

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

1.3.5

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

3.5.3

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

Здесь e_i - базис g, u_i – дополнительный к g в $\bar{g}$ (i=1, 2, 3).

B	Номер	B	Номер	B	Номер
$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	ε_1, ε_2=±1, 1.3.1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$	$ab\neq0$, 1.3.3, 1.3.4	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$	ε =±1, 3.5.1
$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	ε=±1, $a\neq0$, 1.3.2, 1.3.7	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$	$a\neq0$, 1.3.5, 1.3.6	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$a\neq0$, 3.5.2, 3.5.3

Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных выше: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2<0$, 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a<0$, 1.3.3, 1.3.4 при $ab<0$. Локально псевдоримановы однородные пространства (допускающие только псевдориманову метрику) сопряжены одному и только одному из следующих:

	Таблица умножения		Таблица умножения
3.4.1.	(see below)	1.8.4.	(see below)

3.4.1.

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0	0

1.8.4.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	0

3.4.2.

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3

1.8.5.

	e_1	u_1	u_2	u_3

e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	e_1	0

3.4.3.

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

1.1.1.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0
u_3	0	0	0	0

2.21.1.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

1.1.2.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	u_2	0	0	u_2
u_3	0	0	$-u_2$	0

2.21.4.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

1.1.5.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1	0
u_2	u_2	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.8.1.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	0
u_3	$-u_2$	0	0	0

1.1.6.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.8.2.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

1.1.7.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0
u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	

1.8.3.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	$u_2+\lambda e_1$
u_3	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2-\lambda e_1$	0

Здесь e_i - базис g, u_i – дополнительный к g в $\bar{g}$ (i=1, 2, 3).

B	Номер	*B*	Номер	*B*	Номер

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	±, 2.21.1, 1.8.1, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5, 3.4.1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & \varepsilon \end{array}$	$a\neq0$, $\varepsilon=\pm1,0$; 1.8.2	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{array}$	$a\neq0$; 1.1.5
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{array}$	$a\neq0$; 3.4.2, 3.4.3, 2.21.4	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{array}$	$a\neq0$ 1.1.2, 1.1.6; $a=\pm1$ 1.1.1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array}$	$ab\neq0$; 1.1.7

Понятие секционной кривизны

$$K(u_i,u_j)=\frac{R(R(u_i,u_j)u_i,u_j)}{B(u_i,u_i)B(u_j,u_j)-\text{[illegible]})^2},$$

введенное для римановых многообразий, для псевдоримановых пространств может быть введено не для всех направлений, т.к. определитель Грамма в знаменателе обращается в нуль для изотропных двумерных направлений. Если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие секционной кривизны можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности (см. [1]). Для каждого из римановых однородных пространств секционная кривизна:

Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$	Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$
1.3.1, 3.5.1.	0	0	0	1.3.6.	$-\frac{1}{a}$	0	0
1.3.2, 3.5.2.	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	1.3.7.	$\frac{3}{4}a$	$-\frac{\text{[illegible]}}{4}$	$-\frac{\text{[illegible]}}{4}$
1.3.3.	$\frac{{}^3\!/_4 b+}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	1.3.5.	$\frac{1}{a}$	0	0
1.3.4.	$\frac{{}^3\!/_4 b-}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	3.5.3.	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$

Для каждого из псевдоримановых пространств секционная кривизна:

Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$	Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$
1.1.1, 1.8.1, 2.21.1, 3.4.1.	0	0	0	1.8.4.	0	0	$\frac{1}{0}=\infty$
1.1.2.	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$	1.8.5.	0	0	$\frac{\text{[illegible]}}{0}=\infty$
1.1.5.	$\frac{1}{a}$	0	0	3.4.2.	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$

1.1.6.	$-\frac{[illegible]}{4}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}$	2.21.4.	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$
1.1.7.	$\frac{{}^{3}\!/_{4}\, b - [illegible]}{- [illegible]}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	3.4.3.	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
1.8.2.	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{5}{4a}$	1.8.3.	0	0	$\frac{a}{0} = \infty$

Реальная Вселенная однородна и изотропна лишь приближенно, пространство с мало меняющимися по направлению секционными кривизнами может сильно отличаться от пространства постоянной кривизны.

Литература

1. Грибков И. В., Некорректность теоремы Шура. Докл. АН СССР, 1980, 252, № 6, 1304-1307