УДК 514.765.1

КРИВИЗНА ТРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.П. Можей
ИНО БГУ

Симметрические пространства, введенные Эли Картаном [1], обладают математически красивыми алгебраическими свойствами, это пространства аффинной связности без кручения, тензор кривизны которых сохраняется при параллельном перенесении. Название «симметрическое» связано с важным геометрическим свойством таких пространств, которое может быть принято за определение: геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства, т. е. такое преобразование, при котором заданная аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств являются пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т.д. Риманово симметрическое пространство всегда однородно.

Пусть M – многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, тогда $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, обозначим через $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а g – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Строение пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, соответствующих данной паре алгебр Ли $(\bar{g}, g)$, описано в [2], т.е. проблема классификации однородных пространств сводится к классификации пар. Риманово же однородное пространство задается тройкой $(\bar{G}, M, \rho)$, где ρ – инвариантная риманова метрика на M.

Поскольку каждая инвариантная риманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, g-модуль $\bar{g}/g$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать все точные трехмерные g-модули U (что эквивалентно классификации подалгебр в $gl(3, \mathrm{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать все пары $(\bar{g}, g)$ такие, что g-модули $\bar{g}/g$ и U эквивалентны. Потом требуется описать все формы B с точностью до индуцированного действия $\mathrm{Aut}(\bar{g}, g)$. Остается выбрать из найденных троек симметрические. Получим, что все локально симметрические римановы однородные пространства сопряжены одному и только одному из следующих:

	Таблица умножения	B	
1.3.1	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$

1.3.5	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon a > 0$
1.3.6	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon a > 0$
3.5.1	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon = \pm 1$
3.5.2	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
3.5.3	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$

Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают пространства: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2<0$, 1.3.5, 1.3.6 при $\varepsilon a <0$. Локально симметрические псевдоримановы однородные пространства (допускающие только псевдориманову метрику) сопряжены одному из следующих:

	Таблица умножения	B	
3.4.1.	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$

3.4.2.	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$;
3.4.3.	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$;
2.21.1.	$\begin{array}{c\|ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.8.1.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.8.4.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.8.5.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & -e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.1.1.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$	

1.1.5.	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$;

Здесь e_i - базис g, u_i – дополнительный к g в $\overline{g}$ (i=1, 2, 3).

Секционная кривизна вычисляется по формуле

$$K(x,E) = \frac{B(R(Y,Z)Y,Z)}{B(Y,Y)B(Z,Z) - B(Y,Z)^2},$$

где $x \in M$, E – невырожденное плоское сечение в M_x, $\{Y,Z\}$ – базис в E. Для каждого из римановых однородных пространств секционная кривизна имеет вид:

Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$	Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$
1.3.1.	0	0	0	1.3.6.	$-\frac{1}{a}$	0	0
3.5.2.	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	1.3.5.	$\frac{1}{a}$	0	0
3.5.3.	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	3.5.1.	0	0	0

Для каждого из псевдоримановых пространств секционная кривизна имеет вид:

Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$	Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$
1.1.1, 1.8.1, 2.21.1, 3.4.1.	0	0	0	1.8.4.	0	0	$\frac{1}{0} = \infty$
1.1.5.	$\frac{1}{a}$	0	0	1.8.5.	0	0	$\frac{-1}{0} = \infty$
3.4.3.	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	3.4.2.	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$

Список литературы:

1. Картан Эли. Геометрия римановых пространств.– М.-Л. ОНТИ.- 1936.– 244 с.
2. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований/ А. Л. Онищик. – М.: Физ. - мат. лит., 1995. – 344 с.