УДК 514.765.1

Н. П. Можей, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУИР, г. Минск)

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G \subset \bar{G}$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Инвариантные римановы метрики g на M находятся во взаимно–однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G–модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, т.е. каждое риманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathrm{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \le 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$. Линейной связностью на паре ($\bar{g}$, g) будем называть такое отображение $\Lambda : \bar{g} \to gl(V)$, где $V = \bar{g}\,/\,g$, что его ограничение на g есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g-инвариантным. Хорошо известно (см., например, [1]), что инвариантные линейные связности на однородном пространстве (M, G) находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными связностями на паре ($\bar{g}$, g). Тензор кручения имеет вид:

$$T(x_V, y_V) = \Lambda(x)y_V - \Lambda(y)x_V - [x, y]_V \text{ для всех } x, y \in \bar{g},$$

а тензор кривизны – $R(x_V, y_V) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Алгеброй голономии связности на паре ($\bar{g}$, g) называется подалгебра вида

$V + [\Lambda(\bar{g}), V] + [\Lambda(\bar{g}), [\Lambda(\bar{g}), V]] + \mathbf{K}$, где

$$V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{g}\}.$$

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении. Название “симметрическое” связано с одним важным геометрическим свойством таких пространств, которое может быть принято за определение: геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства, т. е. такое преобразование, при котором заданная связность переходит в себя. Риманово симметрическое пространство всегда однородно.

Теорема 1. Локально однородное симметрическое пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $codim_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

<table>
<tr><td></td><td>Таблица умножения</td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3.1</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}$</td><td>$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$</td></tr>
<tr><td>1.3.5,
1.3.6</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & \pm e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & \mp e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$</td><td>$a \neq 0$</td></tr>
<tr><td>3.5.1</td><td>$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$</td><td>±</td></tr>
<tr><td>3.5.2</td><td>$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$</td><td>$a \neq 0$</td></tr>
<tr><td>3.5.3</td><td>$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$</td><td>$a \neq 0$</td></tr>
</table>

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных в теореме: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, 1.3.5, 1.3.6.

Теорема 2. Локально однородное симметрическое пространство, допускающее только псевдориманову метрику, т. ч. $codim_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

<table>
<tr><td>3.4.1.</td><td>$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$</td><td>±</td></tr>
</table>

3.4.2.	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a\neq0$;
3.4.3.	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a\neq0$;
2.21.1.	$\begin{array}{c\|ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.8.1.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.8.4, 1.8.5.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & \pm e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & \mp e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.1.1.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm1 \\ \hline \end{array}$	
1.1.5.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm1 \\ \hline \end{array}$	$a\neq0$;
1.1.6.	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a\neq0$;

Прямыми вычислениями получаем, что, например, в случаях 3.5.2 и 3.5.3 связность имеет вид

$$\Lambda(e_4)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \Lambda(e_5)=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix},\ \Lambda(e_6)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -a & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}.$$

Не нарушая общности можно считать, что $a\geq0$. Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} 0 & a^2 \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix} a^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \mp 1 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $T(u_1,u_2)=2au_1$, $T(u_1,u_3)=2au_2$, $T(u_2,u_3)=2au_3$. Алгебра голономии совпадает с трехмерным неприводимым представлением sl(2, R) при $a^2 \neq \pm 1$ и коммутативна в противном случае.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию всех линейных связностей на трехмерных пространствах, методика также может быть использована для других размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu. // Amer. Journ. Math – 1954. – Vol. 76., № 1. – P. 33–65.

УДК 62-50

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И НОРМАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

При разработке математических моделей экономических систем и технологических процессов на производстве, а также систем автоматического управления такими процессами необходимо учитывать как дифференциальные, так и алгебраические связи в виде уравнений материального баланса в экономике, либо законов Киргофа в электротехнике, либо фондообразующих и нефондообразующих отраслей в экономической системе государства. Кроме того, часто необходимо принимать во внимание и эффекты последействия. Адекватной математической моделью таких процессов являются дескрипторные динамические системы с отклоняющимся аргументом. Такие системы называют либо вырожденными, либо сингулярными [3], либо системами неразрешенными относительно производной, либо системами с обобщенным пространством состояний, либо алгебро-дифференциальными [2] либо дескрипторными [1,2], причем последнее название превалирует.