О ГЕОМЕТРИИ ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Можей Н.П.[1]

Цель работы – описать инвариантные аффинные связности на псевдоримановых однородных пространствах размерности 3, их тензоры кривизны, кручения, выделить из них аффинные связности на римановых пространствах и римановы связности. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. *Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, где $\mathbf{g}$ – инвариантная псевдориманова метрика на M. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ [1]. Существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ такое, что M односвязно и G связна.

Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар коразмерности 3 нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найти (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ найдены в [2], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства – только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Билинейная форма B является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение этого условия для

[1]КГУ, Минск

всех пар $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ и выберем из них пары, допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $\operatorname{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Выберем пространства, допускающие риманову метрику. Из трехмерных римановых однородных пространств следующие 7 соответствуют классификации Терстона:

- если стабилизаторы точек пространства трехмерны ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$), то тройка 3.5.1. задает евклидово пространство E^3, 3.5.2. – сферу S^3, а 3.5.3. – гиперболическое пространство H^3;

- если стабилизаторы одномерны ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$), то M – $\bar{G}$-инвариантное расслоение над одной из двумерных геометрий. На M есть $\bar{G}$-инвариантная метрика, определяющая связность. При нулевой кривизне связности тройка 1.3.5. задает $S^2 \times E^1$, 1.3.6. задает $H^2 \times E^1$, а при ненулевой кривизне тройка 1.3.3. задает $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$, 1.3.7. задает нильгеометрию. Так как 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4 – подалгебры в 3.5.1, 3.5.2 и 3.5.3, они задают те же однородные пространства.

Для каждого из найденных локально псевдоримановых однородных пространств $\operatorname{codim} \mathfrak{g} = 3$ найдем инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, а также определим, при каких условиях связность будет являться естественной связностью без кручения, т.е. иметь те же геодезические, что и каноническая связность. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}l(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а всё отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (см., например, [3]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x) y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y) x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $x, y \in \bar{g}$; тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y \in \bar{g}.$$

Все найденные локально псевдоримановы однородные пространства $\operatorname{codim} \mathfrak{g} = 3$ являются редуктивными (так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ для всех пар; это верно для любого пространства, на котором существует инвариантная невырожденная билинейная форма, в частности, любое риманово пространство является редуктивным). Следовательно, геодезические будут совпадать с геодезическими канонической связности при $\Lambda(x)x = 0$ для любого $x \in \mathfrak{m}$ [1]. Такая связность на редуктивном однородном пространстве всегда существует, причем единственная (так называемая *естественная связность без кручения*), и задается соотношением $\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_m$ для всех $x, y \in \mathfrak{m}$. *Риманова (псевдориманова) связность*, соответствующая форме B, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_m = \frac{1}{2}[x,y]_m + u(x,y),\ 2B(u(x,y),z) = B(x,[z,y]_m) + B([z,x]_m,y)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *связностью Леви-Чивита*. При выполнении условия $B(x,[z,y]_m) + B([z,x]_m,y) = 0$, $x, y, z \in \mathfrak{m}$, риманова (псевдориманова) связность для B совпадает с естественной связностью без кручения, а соответствующее пространство является *естественно редуктивным*. Все естественно редуктивные пространства являются *геодезически орбитальными пространствами* (все максимальные геодезические являются однородными), более того, в размерности не более 5 верно и обратное утверждение [4]. Определено, при каких условиях инвариантная аффинная связность задает естественную связность без кручения, найдены римановы (псевдоримановы) связности и естественно редуктивные пространства.

Литература

[1] *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. New York–London, v. I, 1963; v. II, 1969.

[2] *Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al.* Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces, v. I–III. Preprints Univ. Oslo. № 35–37. 1993.

[3] *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76, № 1. Pp. 33–65.

[4] *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Math. Ital. VII. Ser. B. 1991. Vol. 5, № 1. Pp. 189–246.