компьютерные технологии в моделировании, но и творческое мышление, решая проблему креативного образования.

Таким образом, курсанты привыкают к интерактивным каналам получения новой информации, что ведет к значительному прогрессу в степени усвоения учебного материала и формированию их информационной культуры.

Предлагаемый подход к разработке структуры, содержания и использования учебника приемлем для любых дисциплин, независимо от их направленности. Заложенные в ЭУ дидактические и педагогические принципы позволяют создавать информационно-образовательную среду как гуманитарных, так общенаучных и военно-специальных дисциплин, обеспечивая интенсификацию их преподавания в сочетании с непрерывным процессом формирования информационной культуры и профессиональной компетентности военного специалиста [2].

Особенностью ЭУ является его способность к постоянному видоизменению в зависимости от целей, задач учебного курса, уровня подготовки обучаемых, дополнения новым материалом. Педагог по своему усмотрению может в любое время внести изменения и в учебник, и в контрольный тест, и в оболочку ЭУ.

ЭУ соответствует стандартным требованиям, предъявляемым к электронным учебным изданиям:

– содержание методического материала соответствует целям и задачам темы;

– осуществляется «обратная связь» (тестовая форма контроля);

– доступный и удобный интерфейс, который обеспечен использованием стандартного «офисного пакета» компьютера и не требует установки дополнительных программ;

- содержит список основной и дополнительной литературы.

Проведенные исследования по внедрению мультимедийного обучения в образовательный процесс высших учебных заведений г. Рязани, г. Омска, г. Москвы, г. Сызрани, г. Калининграда, г. Тольятти и др. позволяют сделать вывод об адекватности предложенного метода мультимедийного обучения и качественном положительном влиянии его на профессиональный уровень подготовки выпускников.

Литература:

1 Елистратова, Н.Н. Мультимедиа как средство информатизации образовательного процесса вуза и метод обучения [Текст] / Н.Н. Елистратова : монография. – Рязань, 2011. – 251 с.

2 Елистратова, Н.Н. Методика создания и применения электронного учебника как инновационного средства информатизации образовательного процесса военного вуза [Текст] / Н.Н. Елистратова / Пути повышения уровня подготовки специалистов в высших учебных заведениях / сб. материалов XV ежегодной межвузовской научно-практической конференции / Балтийский военно-морской институт имени адмирала Ф.Ф. Ушакова (филиал ВУНЦ ВМФ «Военно-Морская Академия». – Ч. 1. – Калининград, 2012. – С. 240-243.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Н.П. Можей (mozheynatalya@mail.ru)

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры финансового менеджмента Института непрерывного образования Белорусского государственного университета

Аннотация:

В работе исследуются трехмерные однородные пространства с применением системы Maple, что позволяет находить алгебры Ли векторных полей, когомологии, действия групп Ли, аффинные связности, тензоры кривизны, кручения и геодезические на этих

пространствах. Полученные результаты могут иметь применение в общей теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Ключевые слова: однородное пространство, аффинная связность, системы компьютерной математики.

Современная дифференциальная геометрия, как и другие области математики, привлекает новейшие компьютерные технологии для решения своих задач. Системы компьютерной математики широко применяются в задачах классификации. Так M. Hlavova в [1] удалось классифицировать двупараметрические движения плоскости Лобачевского. T. Arias-Marco и O. Kowalski внесли вклад в проблему классификации 4-мерных однородных D’Atri пространств [2]. Известны результаты, полученные Е.Д. Родионовым и В.В. Славским при классификации локально конформно-однородных многообразий [3]. Задачи классификации левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли с применением системы аналитических расчетов решались также Л.Н. Чибриковой. Пакеты прикладных программ используются для исследования однородных пространств, определения инвариантных свойств петель [4], для изучения свойств флаговых многообразий [5] и др.

Данная работа посвящена применению математических пакетов для исследования трехмерных однородных пространств, а также алгебр Ли векторных полей, когомологий, действий групп Ли, аффинных связностей, тензоров кривизны, кручения и геодезических на этих пространствах. Тема имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях (см., например, [6]). Исследование, например, геодезических сопряжено с необходимостью исследования и решения систем дифференциальных уравнений, что ограничивает возможности применения аналитических методов и вынуждает прибегать к компьютерным методам исследования. Наиболее эффективное решение задачи нахождения геодезических возможно в системах компьютерной математики, в частности, в системе Maple. Maple незаменим как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически, так и для поиска методов решения. Сначала получена локальная классификация трехмерных однородных пространств как пар алгебр Ли.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G \subset \bar{G}$, т.к. многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [7]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Широкий класс среди однородных пространств образуют однородные пространства с разрешимой группой преобразований. Их исследование существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых алгебр Ли, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) алгебр Ли называется эффективной, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. Изотропное действие группы G на T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ как $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно–точной, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$–модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно–точных пар коразмерности три нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$–модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найти (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$–модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [8], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные однородные пространства – просто трехмерные группы Ли. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$–инвариантным. Хорошо известно, что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $x, y \in \bar{G}$; тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{G}$.

За определение алгебры когомологий многообразия принимается ее конструкция согласно теореме де Рама. Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M. В работе [9] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств. Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α, через C_1 – множество $(p-1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, C_2 – множество p–форм, C_3 – множество $(p+1)$–форм и т.д, пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$, пустое множество будем записывать $\{\}$. Пусть $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пространство внешних p–форм, p–форма α из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ замкнута, если $d(\alpha) = 0$, и точная, если $\alpha = d(\beta)$ для некоторой $(p-1)$–формы β из $A^{(p-1)}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Алгебра Ли когомологий $H^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ степени p – векторное пространство замкнутых p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ по модулю точных p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Обозначим H_1 – множество p–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 – множество $(p+1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т.д., т.е. $H = \{H_1, H_2, H_3, ...\}$ – множество всех замкнутых форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $codim_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [3]. Используем пакет DifferentialGeometry, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого задаем структурные константы для этой алгебры Ли и используем команду DGsetup, чтобы инициализировать алгебру. После инициализации можно делать все виды вычислений и проверок. Для подалгебры изотропии $\mathfrak{g}$ однородного пространства, которое мы построили, указываем базис подалгебры**.** Выбирав подалгебру $\mathfrak{g}$, находим (если это возможно) редуктивное дополнение к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого используем команду ComplementaryBasis, чтобы построить максимально общее дополнение, применим команду Query, чтобы определить те значения параметров, для которых дополнение редуктивно. Далее займемся построением однородного пространства. Находим (глобальную) группу Ли $\bar{G}$, такую, что ее алгебра Ли совпадает с $\bar{\mathfrak{g}}$. Сначала определяем локальные координаты группы. Команда LieGroup пакета GroupActions использует 2-е и 3-ю теоремы Ли и непосредственно строит глобальную группу Ли, алгебра Ли которой задана. Результатом выполнения этой команды является модуль, предоставляющий информацию о группе Ли. Явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах получаем с помощью команды LeftMultiplication. Находим лево- и правоинвариантные векторные поля на $\bar{G}$. Они вычисляются командой InvariantVectorsAndForms. Команда LieAlgebraData вычисляет структурные константы для правоинвариантных векторных полей. Эти структурные константы совпадают со структурными константами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Фактор $\bar{G}$ по подгруппе G, порожденной векторными полями, является трехмерным многообразием. Строим однородное пространство $\bar{G}/G$. Для этого нужно вычислить в координатах формулу для проекции π группы $\bar{G}$ на $M=\bar{G}/G$. Эта проекция сопоставляет элементу g группы $\bar{G}$ смежный класс gG, то есть $\pi(g)=gG$. Следовательно, для любого h из G имеем $\pi(gh)=ghG=gG=\pi(g)$, поэтому проекция π инвариантна относительно правого действия G на $\bar{G}$. Локально это правое действие дает левоинвариантное векторное поле**.** Таким образом, если

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4)=[F_1(x_1, x_2, x_3, x_4), F_2(x_1, x_2, x_3, x_4), F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

то составляющие функции F_1, F_2, F_3 – инварианты векторного поля. Это является теоретическим обоснованием для вычисления проекции π**.** Находим действие группы Ли $\bar{G}$ на многообразии $M=\bar{G}/G$. Для этого нужно найти сечение проекции π, то есть, отображение $\sigma{:}M\to\bar{G}$, такое, что $\pi\circ\sigma$ тождественно на M. Тогда действие $\bar{G}$ на M получается как композиция проекции π, левого умножения dotLeft группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения σ. Локальное действие $\bar{G}$ на M вычисляется с использованием команды InfinitesimalTransformation. Результат можно проверить, т. к. структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с алгеброй Ли, с которой мы стартовали. Единица группы $\bar{G}$ проектируется в точку на многообразии M и позволяет найти стабилизатор (подгруппу G), используя команду IsotropySubalgebra.

Рассмотрим, например, пару 1.1.1 (см. [8]). Алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ четырехмерна. Ее таблица умножения при $\lambda=0$ имеет вид $[e_1, e_2] =-e_1$ (остальные структурные константы нулевые), при этом подалгебра $h = [e_1]$. Сначала вычислим когомологии трехмерного однородного многообразия. Используем пакеты LieAlgebras, Tensor, LieAlgebraCohomology, зададим LieAlgebraData алгебру Ли с указанной таблицей умножения. Находим когомологии

C := RelativeChains(h); H := Cohomology(C).

Получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3,\ \theta_4\},\{-\theta_3\wedge\theta_4\},\{\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_4,\ \theta_3\},\{-\theta_3\wedge\theta_4\},\{\}\}.$$

Аналогично, при $\lambda=-1$ получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\}\}$$

Определим по алгебре локальные координаты группы Ли $\overline{G}$, транзитивно действующей на однородном пространстве. Сначала определим группу при помощи команд DGsetup и LieGroup. Умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1 = a_1 + x_1 e^{(-a_3)}, x_2 = a_2 + x_2 e^{a_3}, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли (функция LieAlgebraData):

$$(D_{x1}, D_{x2}, -x_1 D_{x1} + x_2 D_{x2} + D_{x3}, D_{x4}).$$

Обозначим координаты (x, y, z) на M и вычислим действие группы $\overline{G}$ на многообразии M:

$$(x = a_1 + xe^{(-a_3)}, y = a_2 + ye^{a_3}, z = z + a_4).$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M:

[D_x ; D_y; -xD_x + y D_y; D_z].

Убеждаемся, что структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с исходными. Подалгебра, являющаяся алгеброй Ли стабилизатора (IsotropySubalgebra), имеет вид

[-xD_x + y D_y].

Тензор Ω на группе Ли выпишем в виде левоинвариантной формы Мауэра−Картана (с точностью до константы):

$$\Omega = dx_1 dx_2 + dx_2 dx_1 + \beta dx_4 dx_4.$$

Этот тензор является инвариантным относительно подалгебры изотропии. Сведем этот инвариантный тензор (PushPullTensor) на группе Ли $\overline{G}$ к инвариантной невырожденной метрике на M:

$$g = dxdy + dydx + \beta dzdz.$$

Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга (KillingVectors) для метрики. Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики g:

$$(-zD_x + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{D_z}{\beta}, -zD_y + \frac{xD_z}{\beta}, xD_x - yD_y, D_x, D_y).$$

Символы Кристоффеля (Christoffel) для g:

$$C = 0.$$

Тензор кривизны (CurvatureTensor) нулевой. Вычислив первую ковариантную производную кривизны (CovariantDerivative):

$$R_1 = 0,$$

убедились, метрика постоянной кривизны, метрика является конформно плоской (CottonTensor), тензор кручения (TorsionTensor) нулевой, т.е. связность без кручения.

Если $\{x(t); y(t); z(t)\}$ − кривая на M, тогда уравнения геодезических относительно связности − это система ОДУ второго порядка. Найдем вектор (GeodesicEquations), компоненты которого − уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка (dsolve), получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = C_5 t + C_6, \mathrm{y}(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\right\}.$$

Аналогично, при λ=0 умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1=a_1+x_1e^{-a2}, x_2=x_2+a_2, x_3=x_3+a_3, x_4=x_4+a_4)$$

Используя ComplementaryBasis, находим дополнительный базис и определяем, является ли пара редуктивной. Алгебры Ли право и левоинвариантных векторных полей:

$$[D_{x1}, -x_1D_{x1}+D_{x2}, D_{x3}, D_{x4}], [e^{-x2}D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}, D_{x4}].$$

Применяя LieDerivative, pdsolve, Transformation, ComposeTransformations, находим действие $\overline{G}$ на M как композицию проекции π, левого умножения dotLeft группы $\overline{G}$ на $\overline{G}$ и сечения σ:

$$(x=a_1+xe^{-a2}, y=y+a_3, z=z+a_4)$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M:

$$[D_x, -xD_x, D_y, D_z].$$

Используя команду IsotropySubalgebra, получаем стабилизатор, т.е. группу G –

$$[-xD_x].$$

Результаты работы могут иметь приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц, а также могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью и др.

Литература:

1. Hlavova M. Two-parametric motions in the Lobatchevski plane // J. Geom. Graph. - 2002. - V. 6. - №1. - P. 27-35.

2. Arias-Marco T. Classification of 4-dimensional homogeneous D'Atry spaces / T. Arias-Marco, O. Kovalski // ICM 2006 - Posters. Abstracts. Section 5. - Madrid, 2006. - P. 1-2.

3. Rodionov E.D. Conformal deformations of the Riemarmian metrics and homogeneous Riemannian spaces / E.D. Rodionov, V.V. Slavskii // Comm. Math. Univ. Carol. - 2002. - V. 43. - №2. - P . 271-282.

4. Kovacs L. An algorithm for automated generation of invariants for loops with conditions / L. Kovacs. T. Jebelean Proceedings of the Computer-Aided Verification on Information Systems Workshop (CAVIS05), 7th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC05).-Timisoara, 2005. – P . 16-19.

5. Arias-Marco T. A property of Wallach's flag manifolds // Archivum mathematicum(BRNO). - 2007. - V. 43. - P. 307-319.

6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.– М.,1989.– 472 с.

7. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ. – мат. лит., 1995, 344 с.

8. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. Three–dimensional isotropically–faithful homogeneous spaces. v. I–III, Preprints Univ. Oslo, no. 35–37 (1993).

9. Greub W., Halperin S., Vanstone R. Connections, curvature and cohomology. Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, N. Y.– L., 1975.