УДК 512.812.4

Н. П. Можей, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СТАБИЛИЗАТОРОМ РАЗМЕРНОСТИ НЕ МЕНЕЕ ШЕСТИ И АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НИХ

Работа посвящена описанию трехмерных однородных пространств и аффинных связностей на них. В статье рассмотрены группы Ли, действующие транзитивно на изучаемых пространствах, причем стабилизатор действия имеет размерность не менее шести. В работе использован алгебраический подход к описанию аффинных связностей, применен аппарат теории групп и алгебр Ли, а также однородных пространств.

The paper is devoted to the study of three-dimensional homogeneous spaces and affine connections on it. In the paper we concerned only case, when Lie group action is transitive and dimension of the stationary subgroup not less then six. In this work we use the algebraic approach for description of affine connections, methods of the theory of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces.

Введение. Проблема описания многообразий была поставлена еще в начале позапрошлого века, в дальнейшем были классифицированы различные специальные классы многообразий. Наиболее интересным как с математической, так и с физической точки зрения считается однородный случай. Большинство физических моделей являются однородными, и это условие часто бывает априорным, большинство пространств, появляющихся в различных разделах математики, тесно связанных с приложениями, также считаются однородными. Условие однородности является принципиальным и с математической точки зрения, оно позволяет свести задачу к чисто алгебраической, дает возможность применить технику теории групп и алгебр Ли.

Двумерные однородные пространства были классифицированы локально Софусом Ли и глобально Г. Мостовым. С. Ли еще получил некоторые результаты в классификации трехмерных однородных пространств и описал все подалгебры алгебры Ли *gl*(3, C). Проблема нахождения полной классификации трехмерных однородных пространств как пар (группа, подгруппа) или даже (алгебра, подалгебра) очень важна для многих приложений, но также и очень сложна.

Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно точные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Целью работы является классификация трехмерных изотропно точных однородных пространств со стабилизатором размерности не менее шести и описание инвариантных аффинных связностей на них вместе с их тензорами кривизны, кручения, группами голономии и т. д.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$. Две пары групп Ли $(\bar{G}_1, G_1)$ и $(\bar{G}_2, G_2)$ *эквивалентны*, если существует изоморфизм групп Ли

$$\pi\colon \bar{G}_1 \to \bar{G}_2, \text{ такой что } \pi(G_1) = G_2.$$

Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации пар алгебр Ли $(\bar{g}, g)$ с точностью до эквивалентности пар. Пусть $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а g – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Тогда многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G} / G$, а действие $\bar{G}$ на M при таком отождествлении принимает вид

$$s_1(s_2G) = (s_1s_2)G$$

для всех $s_1, s_2 \in \bar{G}$. Точка x при этом отождествляется со смежным классом eG, а касательное пространство T_xM – с фактор-пространством $\bar{g} / g$ (см., например, [1]).

Пары $(\bar{g}_1, g_1)$ и $(\bar{g}_2, g_2)$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм алгебр Ли

$$\pi\colon \bar{g}_1 \to \bar{g}_2, \text{ такой что } \pi(g_1) = g_2.$$

Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в Diff(M). Другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. В терминологии алгебр Ли условие эффективности эквивалентно следующему: назовем пару $(\bar{g}, g)$ *эффективной*, если подалгебра g не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли $\bar{g}$.

Строение пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, соответствующих данной эффективной паре алгебр Ли $(\bar{g}, g)$, было описано в [2]. Поэтому проблема классификации однородных пространств сводится к классификации пар.

В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения, следовательно, можно заменить везде требование G-инвариантности на инвариантность относительно соответствующих действий алгебры Ли g. Изотропное действие группы G на T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{g}$:

$$s.(x+g) = (\operatorname{Ad} s)(x) + g$$

для всех $s \in G, x \in \bar{g}$.

При этом алгебра Ли g действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{g}/g$ следующим образом:

$$x.(y+g) = [x, y] + g$$

для всех $x \in g,\ y \in \bar{g}$. Отображение

$$\rho\colon\ \bar{g} \to gl(\bar{g}/g),\ x \mapsto \operatorname{ad}|_{\bar{g}/g}\, x$$

называется *изотропным представлением* подалгебры g. Пара $(\bar{g}, g)$ называется *изотропно точной*, если точно изотропное представление подалгебры g. В дальнейшем рассматриваются только такие пары.

Будем называть однородное пространство $(M, \bar{G})$ *изотропно точным*, если это можно сказать про пару $(\bar{g}, g)$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Разобьем решение задачи на следующие этапы:

– классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные g-модули U. Это эквивалентно классификации всех подалгебр в $gl(3, \mathrm{R})$ с точностью до сопряженности;

– для каждого g-модуля U, найденного ранее, классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{g}, g)$ такие, что g-модули $\bar{g}/g$ и U эквивалентны.

Отождествим U с R^3 и зафиксируем в нем базис $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$. Зафиксируем базис алгебры $\bar{g} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_n\rangle$, тогда базис подалгебры $g = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{n-3}\rangle$. Пусть $xe_1 + ye_2 + ze_3 + ue_4 + ve_5 + we_6 + te_7 + se_8$ – произвольный элемент подалгебры g (здесь x, y, z, u, v, w, t, s – любые действительные числа).

Все подалгебры в $gl(3, \mathrm{R})$ размерности не менее шести с точностью до сопряженности имеют следующий вид:

6.1

x	z	w
u	y	v
0	0	0

6.2

$\lambda x + y$	z	w
u	$\lambda x - y$	v
0	0	x

6.3

0	v	w
0	x	z
0	y	u

6.4

x	v	w
0	$\lambda x + y$	z
0	u	$\lambda x - y$

6.5

x	z	w
0	y	v
0	0	z

7.1

x	u	t
v	y	w
0	0	z

7.2

x	w	t
0	y	u
0	v	z

8.1

x	z	v
w	$y - x$	u
t	s	$-y$

и вся алгебра $gl(3, \mathrm{R})$.

Соответствующие пары $(\bar{g}, g)$ для всех точных трехмерных g-модулей U либо тривиальны (получаются доопределением умножения внутри U коммутативным, будем нумеровать такие пары *n.m*.1, где *n.m* – номер подалгебры в $gl(3, \mathrm{R})$), либо таблица умножения алгебры $\bar{g}$ имеет следующий вид (с точностью до эквивалентности):

6.1.2

0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	e_7	$-e_8$	0
$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	e_7	0
$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	e_8	0	0
0	0	0	0	e_5	e_6	e_7	e_8	0
$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	e_7
e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	e_8
$-e_7$	0	$-e_8$	$-e_7$	0	0	0	0	e_5
e_8	$-e_7$	0	$-e_8$	0	0	0	0	e_6
0	0	0	0	$-e_7$	$-e_8$	$-e_5$	$-e_6$	0

6.1.3

0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	e_7	$-e_8$	0
$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	e_7	0
$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	e_8	0	0
0	0	0	0	e_5	e_6	e_7	e_8	0
$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	e_7
e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	e_8
$-e_7$	0	$-e_8$	$-e_7$	0	0	0	0	$-e_5$
e_8	$-e_7$	0	$-e_8$	0	0	0	0	$-e_6$
0	0	0	0	$-e_7$	$-e_8$	e_5	e_6	0

6.3.2

0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-e_5$	e_6	0	e_8	$-e_9$
*	0	e_1	0	$-e_6$	0	0	0	e_8
*	*	0	0	0	$-e_5$	0	e_9	0
*	*	*	0	$-e_5$	$-e_6$	0	e_8	e_9
*	*	*	*	0	0	0	$e_1 + 3e_4 + e_7$	$2e_3$
*	*	*	*	*	0	0	$2e_2$	$-e_1 + 3e_4 + e_7$
*	*	*	*	*	*	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	0

Отсутствующие элементы доопределяются по антикоммутативности.

Для найденных однородных пространств находим инвариантные аффинные связности.

Аффинной связностью на паре $(\bar{g}, g)$ называется такое отображение

$$\Lambda : \bar{g} \to gl(V), \text{ где } V = \bar{g} / g,$$

что его ограничение на g есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g-инвариантным. Хорошо известно (см., например, [3]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{g}, g)$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия.

Тензор кручения $T \in \mathrm{InvT}_2^{\,1}(V)$ имеет вид

$$T(x_V, y_V) = \Lambda(x)y_V - \Lambda(y)x_V - [x, y]_V$$

для всех $x, y \in \bar{g}$; тензор кривизны $R \in \mathrm{InvT}_3^{\,1}(V)$ имеет следующий вид:

$$R(x_V, y_V) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{g}$.

Алгеброй голономии связности $\Lambda : g \to gl(V)$ на паре $(\bar{g}, g)$ называется подалгебра алгебры Ли $gl(V)$ вида

$$V + [\Lambda(g), V] + [\Lambda(g), [\Lambda(g), V]] + \dots,$$

где $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in g\}$.

Для 6.1.1 связность имеет следующий вид:

$$\Lambda(e_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(e_9) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b+a \end{pmatrix}.$$

Кривизна связности нулевая при $a = 0$, эта связность без кручения при $a = b$.

Для 6.1.2 связность имеет вид

$$\Lambda(e_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(e_9) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b+a \end{pmatrix}.$$

Кривизна связности нулевая при $a^2 = 1$, эта связность без кручения при $a = b$.

Для 6.1.3 связность имеет следующий вид:

$$\Lambda(e_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(e_9) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b+a \end{pmatrix}.$$

Кривизна связности всегда ненулевая, эта связность без кручения при $a = b$.

Для 6.3.2 связность имеет вид

$$\Lambda(e_7) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(e_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_9) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кривизна связности нулевая, эта связность без кручения.

Для 6.4.1 при $\lambda = 1/2$ связность имеет следующий вид:

$$\Lambda(e_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(e_9) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кривизна связности нулевая, а кручение нет.

Для остальных однородных пространств связность существует, но только тривиальная, т. е. $\Lambda(e_{n-2}) = \Lambda(e_{n-1}) = \Lambda(e_n) = 0$.

Заключение. Описаны все трехмерные изотропно точные однородные пространства со стабилизатором размерности не менее шести и аффинные связности на них вместе с их тензорами кривизны и кручения. Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию всех локально однородных аффинных связностей на трехмерных пространствах. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

Литература

1. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

3. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.

Поступила 29.02.2012