Трехмерные псевдоримановы однородные пространства и геодезические на них

Можей Н.П.[1]
[1]к.ф.-м.н., доцент, Брянский государственный технический университет, кафедра "Высшая математика", доцент, mozheynatalya@mail.ru

Аннотация. Целью работы является описание геодезических на трехмерных римановых (псевдоримановых) многообразиях. Приведена полная локальная классификация римановых (псевдоримановых) однородных пространств, что эквивалентно описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную билинейную форму на изотропном модуле.

Ключевые слова: геодезические, однородные пространства, алгебры Ли, римановы многообразия.

THREE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN HOMOGENEOUS SPACES AND GEODESIC

Mozhej N.P.[1]
[1]Cand. Sci. (Phis.-Math.), Assoc. Prof., Bryansk state technical university, Assistant Professor, mozheynatalya@mail.ru

Abstract. The aim of this paper is to describe geodesies on Riemannian (pseudo-Riemannian) manifolds in dimension 3. We present complete local classification of Riemannian (pseudo-Riemannian) homogeneous spaces. It is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras supplied with an invariant nondegenerate symmetric bilinear form on the isotropy module.

Keywords: geodesic, homogeneous spaces, Lie algebras, Riemannian manifolds.

Многие виды геометрий могут быть изучены с помощью некоторых выделенных кривых. Самый известный вид таких кривых — это геодезические кривые римановой геометрии. Теория геодезических имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях (см., например, [1]). Со времен возникновения римановой геометрии известно, что геодезические риманова многообразия локально минимизируют длину путей. Именно эта вариационная задача и привела впервые к геодезическим.

Пусть M – многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа G, (M, G) – однородное пространство, H - стабилизатор произвольной точки x. Пусть g – алгебра Ли группы Ли, а h – подалгебра, соответствующая подгруппе H. Изучая однородные пространства важно рассматривать не саму группу а ее образ в Diff(M), другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы на многообразии M. Строение пар групп Ли (G, H), соответствующих данной эффективной паре алгебр Ли (g, h), было описано в [2], т.е. проблема классификации однородных пространств сводится к классификации пар.В дальнейшем предполагать, что H – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения, следовательно можно заменить требование H-инвариантности на инвариантность относительно соответствующих действий алгебры Ли h. Отображение: $h \rightarrow gl(g/h)$, $x \rightarrow ad|g/h$ называется изотропным представлением подалгебры h. Риманово (псевдориманово) однородное пространство задается тройкой (G, M, ρ), где G - связная группа Ли, M является связным гладким многообразием с транзитивным действием , а ρ - инвариантная риманова (псевдориманова)метрика на M.

Инвариантные римановы метрики ρ на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на H-модуле g/h. Поскольку каждая инвариантная риманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, h-модуль g/h точен. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные римановы однородные пространства - только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные h-модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в gl(3, R) с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары (g, h) такие, что h-модули g/h и U эквивалентны и выбрать пары, допускающие риманову (псевдориманову) метрику. Далее описать все такие формы B с точностью до индуцированного действия Aut(g, h).

Получим, что все локально римановы однородные пространства сопряжены одному и только одному из следующих: здесь e_1 - базис h, u_1 – дополнительный к h в g (i=1, 2, 3). Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных выше: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2<0$, 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a <0$, 1.3.3, 1.3.4 при $ab<0$.

Из трехмерных римановых однородных пространств следующие 7 соответствуют классификации Терстона:- если стабилизаторы точек трехмерны, то тройка 3.5.1. задает евклидово пространство,3.5.2. --- сферу, а 3.5.3. --- гиперболическое пространство;- если стабилизаторы одномерны, то M - инвариантное расслоение над одной из двумерных геометрий. Метрика определяет связность, при нулевой кривизне связности 1.3.5. задает $S^2\times E^1$, 1.3.6. задает $H^2\times E^1$, а при ненулевой кривизне 1.3.3. задает SL(2, R), 1.3.7. задает нииль-геометрию.- 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4 – подалгебры в3.5.1, 3.5.2 и 3.5.3 соответственно.

Дифференцируемый путь на M называется геодезической, если его касательное поле параллельно. Справедлив следующий факт (см., например, [3]): пусть Y из h, X из m= g/h. Тогда γ(t)=exp(X+Y)t-e есть геодезическая линия, когда выполняется одно из условий:

1. B([Y, X], Z) = B(X, [X, Z]) для всех Z из m;
2. B([Y + X, Z], X) = 0 для всех Z из m.

Таким образом, в алгебраической форме описаны геодезические на трехмерных римановых (псевдоримановых) многообразиях.

Библиографический список

Таблица 1

Локально римановы однородные пространства. Начало таблицы.

<table>
<tr><td></td><td>Таблица умножения</td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3.1</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}$</td><td>$\varepsilon_1, \varepsilon_2=\pm1$</td></tr>
<tr><td>1.3.2</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 & -u_2 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$</td><td>$\varepsilon=\pm1$, $a\neq0$</td></tr>
<tr><td>1.3.3</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$</td><td>$ab\neq0$</td></tr>
<tr><td>1.3.4</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$</td><td>$ab\neq0$</td></tr>
<tr><td>1.3.5</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm1 \\ \hline \end{array}$</td><td>$a\neq0$</td></tr>
<tr><td>1.3.6</td><td>$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline \end{array}$</td><td>$a\neq0$</td></tr>
</table>

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М., 1989.

Издательство ИНГН

Таблица 2

Локально римановы однородные пространства. Продолжение таблицы 1.

Таблица умножения	B	
3.4.1. $\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}$	$\pm$
3.4.2. $\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{matrix}}$	$a \neq 0$;
3.4.3. $\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{matrix}}$	$a \neq 0$;
2.21.1. $\begin{array}{c\|ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}$	$\pm$
2.21.4. $\begin{array}{c\|ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{matrix}}$	$a \neq 0$;
1.8.1. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}$	$\pm$
1.8.2. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & \varepsilon \end{matrix}}$	$a \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1, 0$;

2. Кобаяси Ш. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981.

3. Kowalski O., Vanhecke L. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics. Boll. Unione Mat. Ital. VII. Ser. B., 1991, №

Таблица 3

Локально псевдоримановы однородные пространства. Продолжение таблицы 1.

1.8.3. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2+\lambda e_1 \\ u_3 & -u_2 & -u_1 & -u_2-\lambda e_1 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}}$	$\pm$
1.8.4. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}}$	$\pm$
1.8.5. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & -e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}}$	$\pm$
1.1.1. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{array}}$	
1.1.2. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{array}}$	$a \neq 0$;
1.1.5. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{array}}$	$a \neq 0$;
1.1.6. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{array}}$	$a \neq 0$;
1.1.7. $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array}}$	$ab \neq 0$;

Таблица 4

Геодезические на трехмерных римановых (псевдоримановых) многообразиях. Начало таблицы.

Номер тройки	$Y+X$	
	римановы	
3.5.1.	$e_2+\gamma_3 e_3+\alpha_3\gamma_3 u_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
	$e_1+\gamma_2 e_2+\gamma_3 e_3-\alpha_2\gamma_3 u_1+\alpha_2 u_2-\alpha_2\gamma_2 u_3$	
3.5.2.	$e_2+\gamma_3 e_3+\alpha_3\gamma_3 u_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
	$e_1+\gamma_2 e_2+\gamma_3 e_3-\alpha_2\gamma_3 u_1+\alpha_2 u_2-\alpha_2\gamma_2 u_3$	
3.5.3.	$e_2+\gamma_3 e_3+\alpha_3\gamma_3 u_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
	$e_1+\gamma_2 e_2+\gamma_3 e_3-\alpha_2\gamma_3 u_1+\alpha_2 u_2-\alpha_2\gamma_2 u_3$	
1.3.1.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
1.3.2.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_3 u_3$
1.3.3.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$e_1+\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2-\frac{a}{b}u_3$
	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$	$\alpha_3 u_3$
1.3.4.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$e_1+\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2-\frac{a}{b}u_3$
	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$	$\alpha_3 u_3$
1.3.5.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
1.3.6.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
1.3.7.	$e_1+\alpha_3 u_3$	$e_1+\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2-\frac{a}{b}u_3$
	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$	$\alpha_3 u_3$
	псевдоримановы	
3.4.1.	$\alpha_2\gamma_3 e_1+\gamma_3 e_3+\alpha_2 u_2+u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$
	$-\alpha_2\gamma_3 e_1+\gamma_2 e_2-\alpha_3\gamma_2 e_3+u_1+\alpha_2 u_2-\alpha_3 u_3$	
3.4.2.	$\alpha_2\gamma_3 e_1+\gamma_3 e_3+\alpha_2 u_2+u_3$	$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$

1, pp.189–246.

The list of references

1. Arnol'd V.I. Mathematical methods of classical mechanics. – M, 1989.
2. Kobajasi Sh. Bases of differential geometry. Moscow, Science, 1981.
3. Kowalski O., Vanhecke L. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics. Boll. Unione Mat. Ital. VII. Ser. B., 1991, № 1, pp.189–246.

Publishing House INGN

Таблица 5

Геодезические на трехмерных римановых (псевдоримановых) многообразиях. Продолжение таблицы.

	$-\alpha_2\gamma_3 e_1 + \gamma_2 e_2 - \alpha_3\gamma_2 e_3 + u_1 + \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3$	
3.4.3.	$\alpha_2\gamma_3 e_1 + \gamma_3 e_3 + \alpha_2 u_2 + u_3$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
	$-\alpha_2\gamma_3 e_1 + \gamma_2 e_2 - \alpha_3\gamma_2 e_3 + u_1 + \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3$	
2.21.1.	$e_2 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
	$e_1 + \gamma_2 e_2 - \alpha_2\gamma_2 u_1 + \alpha_2 u_2$	
2.21.4.	$e_2 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
	$e_1 + \gamma_2 e_2 - \alpha_2\gamma_2 u_1 + \alpha_2 u_2$	
1.8.1.	$e_1 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
1.8.2.	$e_1 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$
	$e_1 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha\varepsilon u_3$	
1.8.3.	$e_1 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1$
	$e_1 + \alpha_1 u_1 - u_2$	
1.8.4.	$e_1 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
1.8.5.	$e_1 + \alpha_1 u_1$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
1.1.1.	$e_1 + \alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
1.1.2.	$e_1 + \alpha_3 u_3$	$e_1 + \alpha_1 u_1 - u_3$
	$\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1$
1.1.5.	$e_1 + \alpha_3 u_3$	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$
1.1.6.	$e_1 + \alpha_3 u_3$	$e_1 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + {}^{1}\!/_{a}\, u_3$
	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$	$\alpha_3 u_3$
1.1.7.	$e_1 + \alpha_3 u_3$	$e_1 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + {}^{a}\!/_{b}\, u_3$
	$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$	$\alpha_3 u_3$

Библиографическая ссылка на статью:

Можей Н.П. Трехмерные псевдоримановы однородные пространства и геодезические на них// Электронный научный журнал "ФИЗ-МАТ". - 2013. - Выпуск 1(11) Январь-Март. С. 3-9. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.phiz-math.ingnpublishing.com/archive/2013/release_1_11_january-march/mozhej_n_p_trehmernye_psevdorimanovy_odnorodnye_prostranstva_i_geodezicheskie_na_nih/ DOI:

Получено: 2013-02-13 Одобрено: 2013-02-22 Размещено: 2013-03-29

The reference for citation the article:

Mozhej N.P. Three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces and geodesic [Trehmernye psevdorimanovy odnorodnye prostranstva i geodezicheskie na nih]. Electronic csientific journal "PHYZ-MATH" [Elektronnyj nauchnyj zhurnal "FIZ-MAT"]. 2013, Release 1(11) January-March , pp. 3-9. [Online]. Available at: http://www.phiz-math.ingnpublishing.com/archive/2013/release_1_11_january-march/mozhej_n_p_trehmernye_psevdorimanovy_odnorodnye_prostranstva_i_geodezicheskie_na_nih/ DOI:

Received: 2013-02-13 Accepted: 2013-02-22 Published on-line: 2013-03-29