Применение информационных технологий в преподавании статистического анализа финансовых данных

Можей Н.П. e-mail: mozheynatalya@mail.ru,
Институт непрерывного образования Белорусского государственного университета

В наше время информационные технологии проникают во все стороны человеческой деятельности, работа на финансовом рынке не является исключением. Формирование информационной культуры возможно только при использовании в учебном процессе дисциплин, ориентированных на применение компьютерных информационных технологий в профессиональной среде деятельности будущих специалистов. Современные инвесторы должны принимать решения, основанные на строгом расчете, а не на интуиции. Следует также учитывать, что финансовый рынок сейчас является стохастическим. Поэтому решение задач финансовой экономики требует использования математических методов для описания процессов изменения рыночных показателей и формирования оптимальной стратегии инвестора. Проблемы применения этих методов оказываются достаточно сложными и для их решения требуется применение информационных и компьютерных технологий.

Традиционным способом подготовки специалистов является изучение теории. В настоящее время есть выход – широкое использование методов моделирования процессов и явлений. При этом основой является использование математических моделей, реализованных на компьютере и позволяющих интерактивно изменять параметры исследуемых объектов.

В курсе «Статистический анализ финансовых данных» излагаются математические основы анализа процентных ставок и численных процедур, моделирующих их динамику. Эта дисциплина входит в состав дисциплин специализации, предусмотренных учебным планом специальности «Актуарная математика». Сначала в курсе описывается структура финансового рынка, приводятся сведения о рыночных котировках, составляющие исходные данные для расчетов всех финансовых показателей. С тех пор как на финансовых рынках стали широко продаваться и покупаться не только так называемые рисковые активы, т. е. ценные бумаги с неопределенной доходностью, но и финансовые производные с доходностью, обусловленной стоимостью рисковых активов, интерес к стохастическим задачам финансовой математики сильно возрос и не ослабевает. Состояние современного финансового рынка характеризуется различными показателями, наиболее существенный среди них – процентная ставка доходности. Через эту ставку определяются цены финансовых активов и стоимости финансовых контрактов. Дело в том, что для принятия решения об инвестировании в ценные бумаги необходимо в момент их приобретения знать настоящую стоимость потока платежей, связанного с этими бумагами. Такой поток является неопределенным, он зависит от рыночной процентной ставки, случайно изменяющейся во времени. Возникает ряд проблем с определением стоимости ценных бумаг и портфелей, составленных из них. Основная – составление и анализ математической модели изменения рыночной процентной ставки, которая описывается случайным процессом. Второй важной проблемой является нахождение формул определения стоимости рисковых активов и финансовых производных, основанных на них. Подтверждением важности этих проблем является присуждение нобелевских премий за работы в этом направлении.

Временная структура доходности является одним из основных инструментов, которыми пользуются участники финансового рынка при решении вопроса об инвестировании средств в ценные бумаги. Чаще всего используются так называемые аффинные модели временной структуры доходности, порождаемые двумя различными моделями краткосрочных процентных ставок: гауссовой и «с квадратным корнем». Так называемая общая модель не только объединяет указанные два типа, но и позволяет конструировать широкий спектр моделей. Далее в курсе проводится анализ кривых форвардных ставок для достаточно широкого класса однофакторных аффинных моделей временной структуры, проводится описание основных математических моделей динамики процентных ставок, являющееся базой для формирования компьютерных заданий. Примером такого задания может служить

Задача. Сгенерировать N=25 независимых траекторий винеровского процесса с эквидистантным временным шагом размера Δ=0,001 на интервале [0, T] для T=1. Соответственно этим траекториям винеровских процессов смоделировать N=25 траекторий процесса Ито X, удовлетворяющих уравнению

$$dX_t = a\, X_t\, dt + b\, X_t\, dW_t$$

для X_0=1, a=1,5 и b=1 и их аппроксимации Эйлера с эквидистантным временным шагом размера Δ=0,064 на интервале [0, T] для T=1. Оценить статистику. Повторить это для размеров эквидистантного шага Δ=0,016; 0,004; 0,001 и составить таблицу соответствия значений

Δ и $\hat{\varepsilon}$. Выяснить, улучшается ли оценка $\hat{\varepsilon}$ абсолютной ошибки с уменьшением размера эквидистантного шага Δ. Графически изобразить линейную интерполяцию полученной аппроксимации и точное решение для некоторой выборочной траектории винеровского процесса. Смоделировать $M = 10$ вариантов траекторий процесса Ито X. Оценить 90%-й доверительный интервал для абсолютной ошибки ε. Повторить это для M=20, 40 и 100 вариантов, в каждом случае используя уже смоделированные варианты. Изобразить на чертеже доверительные интервалы для ε в зависимости от значений M.

Выполнение подобных заданий без использования компьютерного анализа не представляется возможным. На подобных заданиях студенты учатся применять компьютерную технику для анализа финансовой информации, планировать, прогнозировать и делать выводы о результатах моделирования.

В исследованиях часто точные модели приводят к сложным вычислительным проблемам, важно найти компромисс между упрощающими предположениями и доступной сложностью численного анализа. Используемые для анализа математические модели процессов финансового рынка часто приводят к математическим уравнениям, которые не могут быть решены в аналитическом виде, либо к трудным вычислительным численным проблемам. Поэтому рассматривается возможность аппроксимаций таких моделей, чтобы математических и вычислительных трудностей можно было бы избежать. Некоторые такие возможности касаются проблемы определения плотностей вероятностей многомерного диффузионного процесса «с квадратным корнем», решения многомерных дифференциальных уравнений, решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, а также моделирования непрерывных случайных процессов посредством процессов дискретного времени. Вводятся аппроксимации стохастических процессов и их характеристик с учетом значений параметров реальных рыночных данных. В целом эта тема курса посвящена преобразованию процессов непрерывного времени в дискретные последовательности, удобные для компьютерной реализации. Студенты учатся самостоятельно находить наиболее эффективную схему для моделирования. Например, рассматривается

Задача. Получить разложение Ито – Тейлора, схемы Мильштейна, схемы Платена – Вагнера для моделей динамики процентных ставок. Выбрать одну из моделей и соответствующий ей набор параметров. Для выбранной модели построить численную процедуру и осуществить моделирование по каждой из трех схем:

Эйлера, Мильштейна и Платена – Вагнера. Для моделирования по каждой схеме использовать одну и ту же траекторию управляющего винеровского процесса для эквидистантного временного шага величиной $\Delta = 0{,}001$. Изобразить все три траектории графически. Сделать выводы об эффективности использования схем Мильштейна и Платена – Вагнера по сравнению со схемой Эйлера.

Потом в курсе излагаются методы статистического оценивания неизвестных параметров и описываются задания по моделированию динамики процентных ставок и имитации реальных данных. Например,

Задача. Создать выборку $X=\{x_k,\ 0\le k\le N\}$, из $N=1000$ псевдослучайных чисел, имеющих распределение гамма с параметрами θ_1 и θ_2. Затем на основе этой выборки образовать 10 подвыборок

$$X_i=\{x_k,\ 0\le k\le N_i\},$$

где $i=1, 2, \ldots, 10$, а $N_i = i\ 0{,}1N$, т. е. X_i – это первые N_i элементов из X. Вычислить оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ параметров θ_1 и θ_2 по методу моментов и методу максимального правдоподобия для каждой подвыборки X_i. По результатам вычислений оценок составить таблицу оценок каждого параметра по каждому методу оценивания параметров. Построить график зависимости отклонений оценки параметра $\hat{\theta}_1$ от его истинного значения θ_1. Сделать то же самое для оценки $\hat{\theta}_2$. Проанализировать характер изменения отклонений $|\hat{\theta}_1-\theta_1|$ и $|\hat{\theta}_2-\theta_2|$ в зависимости от объема выборки N_i. Выполнить задание для псевдослучайных чисел, имеющих распределение процесса Ана – Гао. Для создания основной выборки $Y=\{y_k,\ 0\le k\le N\}$, использовать следующее соотношение, существующее между значениями процесса Ана – Гао и случайными числами распределенными по закону гамма: $y_k=1/x_k$, $0\le k\le N$.

Благодаря использованию компьютера в круг рассмотрения удается включать объекты с более сложными связями между параметрами, не требуя математической простоты моделей.

Для моделирования динамики процентных ставок и имитации реальных данных можно также использовать задания вида:

Задача. Имитировать временной ряд $\{r_l,\ 1\le l\le 1000\}$, аппроксимирующий по схеме Эйлера с эквидистантным шагом $\Delta = 1$ траекторию процесса, порождаемого моделью Васичека

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\, dW_t$$

с параметрами k =0,0484, r_0=θ=0,1132, σ=0,0112. Использовать метод наименьших квадратов для оценки параметров временного ряда по выборке $\{r_l, 1 \le l \le 1000\}$.

При рассмотрении математических моделей изменения цен на финансовом рынке с непрерывным временем обычно принимается, что процессы процентных ставок на рынке следуют стохастическим дифференциальным уравнениям. Такие случайные процессы описываются некоторой объективной вероятностной мерой. На финансовом рынке арбитражем называют возможность получения торговой прибыли без каких-либо потерь. Обычно условием отсутствия арбитража является предположение о существовании эквивалентной мартингальной меры, при которой процесс изменения финансового показателя становится мартингалом. Примером задания по изучению этой тематики может служить

Задача. Преобразовать массив реальных финансовых данных в файлы EXCEL. Оценить плотность вероятностей выборочных данных двумя способами: непараметрическим и параметрическим. В качестве параметрической оценки плотности взять функцию

$$f(x|\, a, b, \alpha, \beta) = c \exp\{- a/x^{\alpha} - bx^{\beta}\},$$

где c – константа нормировки; a, b, α, β – положительные параметры, подлежащие оценке. Для их получения использовать минимизацию по этим параметрам выражения $\rho(\xi) \to \min$ по a, b, α, β, где ρ(.) – некоторая выпуклая функция (квадрат, модуль и т. п.); ξ определяется как разность между выборочной функцией распределения $F_n(x)$ и

$$F(x) \equiv \int_0^x f(s \,|\, a, b, \alpha, \beta) ds .$$

На занятиях студенты проводят обработку и анализ реальных финансовых данных, находят модели и анализируют их. Компьютер часто выдает уже готовый результат, но от студента требуется понимание экономического смысла полученных решений и умение трактовать полученные данные.

Литература

1. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев; Том 1,2. – М.: Фазис, 1998.

2. Медведев, Г. А. Стохастические процессы финансовой математики / Г. А. Медведев. – Мн.: БГУ, 2005.

3. Malliavin, P. Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance / P. Malliavin, A. Thalmaier. – Springer-Verlag, 2005.