*Физико-математические науки* *УДК 514.76*

# Геодезические и когомологии на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах

***Можей Наталья Павловна,***
*кандидат физ.−мат. наук, доцент*
*Белорусский государственный технологический университет,*
*кафедра высшей математики*

*220006, Беларусь, г. Минск, ул. Свердлова, 13а*

*тел. 375(17)2920357,*
*e-mail: mozheynatalya@mail.ru*

***Аннотация.*** *Работа посвящена описанию трехмерных псевдоримановых однородных пространств и когомологий, геодезических на них. Приведена классификация псевдоримановых однородных пространств с разрешимой группой преобразований, что эквивалентно описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную билинейную форму на изотропном модуле. Использован алгебраический подход к описанию когомологий, применен аппарат теории групп и алгебр Ли, а также однородных пространств.*

***Ключевые слова:*** *геодезическая, когомологии, однородное пространство, группа преобразований, псевдориманово многообразие.*

Работа посвящена нахождению геодезических и когомологий на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. Рассматриваемая тема имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях [1].

Пусть $M$ − дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ − стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств ($M$, $\bar{G}$) равносильна классификации пар групп Ли ($\bar{G}$, $G$) (см., например, [2]). Широкий класс среди однородных пространств образуют однородные пространства с разрешимой группой преобразований. Их исследование существенно затруднено тем, что в отличие от полупростых алгебр Ли, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. О «разрешимых» римановых многообразиях, на которых транзитивно действует разрешимая подгруппа полной группы изометрий, см. [3].

Начнем с локального описания однородных пространств. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ − алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ − подалгебра, соответствующая подгруппе $G$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что $G$ − связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы $G$ на $T_xM$ − это фактордействие присоединенного действия $G$ на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g})=(Ads)(x)+\mathfrak{g},$ для всех $s\in G, x\in\bar{\mathfrak{g}}.$ При этом алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$x.(y+\mathfrak{g})=[x,y]+\mathfrak{g}$$

для всех $x\in\mathfrak{g}, y\in\bar{\mathfrak{g}}.$ Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно−точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$ произвольной точки $x\in M$ на $T_xM$ имеет нулевое ядро.

*Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой $(\bar{G},M,\mathbf{g})$, где $\bar{G}$ − связанная группа Ли, $M$ является связанным гладким многообразием с транзитивным действием $\bar{G}$, а $\mathbf{g}$ − инвариантная псевдориманова метрика на $M$. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на $M$ находятся во взаимно−однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами $B$ на $G$−модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ([4]). Билинейная форма $B$ также является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$−модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$B(x.v_1,v_2)+B(v_1,x.v_2)=0 \quad \text{для всех} \quad x\in\mathfrak{g}, v_1,v_2\in\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}. \qquad (1)$$

Каждое псевдориманово однородное пространство $(\bar{G},M,\mathfrak{g}),$ $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}\le 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},B)$, где $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ − эффективная пара алгебр Ли, а $B$ − инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$ модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Действительно, из [5] следует, что существует единственное (с точностью до эквивалентности) эффективное однородное пространство $(\overline{G},M)$ такое, что $M$ односвязно и стационарная подгруппа $G$ связна. Покажем, что это однородное пространство допускает единственную инвариантную псевдориманову метрику $\mathbf{g}$, соответствующую билинейной форме $B$. Пусть $m = eG \in M$, где $e$ – единичный элемент в $\overline{G}$, для существования $\mathbf{g}$ достаточно, чтобы $B$ было инвариантно относительно изотропного действия $G$ на $T_mM \cong \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Но это условие выполняется, так как $G$ связана и $B$ – инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$–модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Таким образом, существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\overline{G},M,\mathrm{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},B)$, такое, что $M$ односвязно и $G$ связна. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством*.

Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, $\mathfrak{g}$–модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно–точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$–модули $U$ (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathrm{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$–модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и $U$ эквивалентны. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}=3$ найдены в [6], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные псевдоримановы однородные пространства – только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Билинейная форма $B$ является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$–модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}=3$ и выберем из них допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $Aut(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

**Теорема 1** *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *– локально псевдориманово однородное пространство, т.ч.* $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$*,* $\bar{\mathfrak{g}}$ *– разрешима и* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$*. Оно эквивалентно одной и только одной из следующих пар:*

1.1.1. $\bar{\mathfrak{g}} = (D_x, D_y, -x D_x + y D_y, D_z)$, $\mathfrak{g} = (-x D_x + y D_y)$;

1.1.2. $\bar{\mathfrak{g}} = (D_x, D_y, -x D_x + y D_y, y D_y + D_z)$, $\mathfrak{g} = (-x D_x + y D_y)$;

1.1.6. $\bar{\mathfrak{g}} = (-D_z, D_x + y D_z, D_y, -x D_x + y D_y)$, $\mathfrak{g} = (-x D_x + y D_y)$;

1.3.1. $\bar{\mathfrak{g}} = (D_x, D_y, -y D_x + x D_y, D_z)$, $g = (-y D_x + x D_y)$;

1.3.2. $\bar{\mathfrak{g}} = (D_x, D_y, -y D_x + x D_y, x D_x + y D_y + D_z)$, $\mathfrak{g} = (-y D_x + x D_y)$;

1.3.7. $\bar{\mathfrak{g}} = (-2 D_z, D_x + 2 y D_z, D_y, -y D_x + x D_y + (-y^2 + x^2) D_z)$, $\mathfrak{g} = (-y D_x + x D_y + (-y^2 + x^2) D_z)$;

1.8.1. $\bar{\mathfrak{g}} = (-D_y, D_x, -z D_x + x D_y, D_z)$, $\mathfrak{g} = (-z D_x + x D_y)$;

1.8.3. $(a > -1/4)$ $\bar{\mathfrak{g}} = (D_z, -e^{(-(-1+a)x)} D_y + (-1+a) y D_z, D_y, D_x + y D_y + z (a+1) D_z)$,

$\mathfrak{g} = ((1 - e^{(-(-1+a)x)}) D_y + (-1+a) y D_z)$;

1.8.3. $(a < -1/4)$ $\bar{\mathfrak{g}} = (D_z, -((2\cos(x) - a\sin(x)) D_y)/((2\sin(x) + a\cos(x))) + 1/2 ((8\cos(x) + 10 a^2\cos(x) + 2 a^4\cos(x) +$
$+12 a\sin(x) + 3\sin(x) a^3) y D_z)/(a^3 (2\sin(x) + a\cos(x))), D_y - ((a^2+4) y D_z)/(2 a^3), D_x + ((-2\cos(x) + a^2\cos(x) +$
$+3 a\sin(x)) y D_y)/((2\sin(x) + a\cos(x))) + 1/2 (8\cos(x) y^2 + 6 a^2\cos(x) y^2 + 4 a^5\cos(x) z + a^4\cos(x) y^2 + 4\sin(x) y^2 a +$
$+8\sin(x) a^4 z + \sin(x) y^2 a^3) D_z/(a^3 (2\sin(x) + a\cos(x))))$, $\mathfrak{g} = ((\sin(x)(a^2+4) D_y)/(a (2\sin(x) + a\cos(x))) + +1/2 ((a^2+4)$
$y (-4\sin(x) + 3 a^2\sin(x) + 2 a^3\cos(x)) D_z)/(a^4 (2\sin(x) + a\cos(x))))$;

1.8.3. $(a = -1/4)$ $\bar{\mathfrak{g}} = (D_z, (D_y)/(x-1) - (y (2x-1) D_z)/(2 (x-1)), D_y - (y D_z)/2, D_x + (y (x-2) D_y)/(x-1) +$
$+((x y^2 + 4 z x - 4 z) D_z)/(2 (x-1)))$ $\mathfrak{g} = ((x D_y)/(x-1) - (y (3x-2) D_z)/(2 (x-1)))$;

1.8.4. $\bar{\mathfrak{g}} = (e^{(2x)} D_z, -D_y + 2 y D_z, e^{(2x)} D_y, D_x + y D_y + 2 z D_z)$, $\mathfrak{g} = ((e^{(2x)} - 1) D_y + 2 y D_z)$;

1.8.5. $\bar{\mathfrak{g}} = (D_z, -(\cos(x) - \sin(x)) D_y/(\cos(x) + \sin(x)) + 2 y (2 x\cos(x)\sin(x) + 2\cos(x)^2 - 1 - x) D_z/(-1 +$
$+2\cos(x)^2), D_y + 2 x y D_z, D_x - (\cos(x) - \sin(x)) y D_y/(\cos(x) + \sin(x)) + 2 y^2 (2 x\cos(x)\sin(x) +$
$+2\cos(x)^2 - 1 - x) D_z/(-1 + 2\cos(x)^2)$, $\mathfrak{g} = 2\sin(x) D_y/(\cos(x) + \sin(x)) + 2 (\cos(x) + \sin(x) + 2\sin(x) x) y D_z/(\cos(x) + \sin(x))$;

2.21.1. $\bar{\mathfrak{g}} = (D_z, D_y, D_x, -x D_y - y D_z, x D_x - z D_z)$, $\mathfrak{g} = (-x D_y - y D_z, x D_x - z D_z)$.

Дифференцируемый путь на $M$ называется *геодезической*, если его касательное поле параллельно. Еще со времен возникновения римановой геометрии известно, что геодезические риманова многообразия локально минимизируют длину дифференцируемых путей. Векторное поле называется *инфинитезимальной изометрией*, или *киллинговым* векторным полем (или также изометрическим движением), если локальная 1−параметрическая группа локальных преобразований, порожденная полем в окрестности каждой точки, состоит из локальных изометрий. Множество всех инфинитезимальных изометрий образует алгебру Ли, размерность которой для связного риманова многообразия M не превосходит $n(n+1)/2$ (при равенстве − $M$ есть пространство постоянной кривизны). Если поле порождает (глобальную) 1 −параметрическую группу изометрий, то оно называется *полным*. Множество всех полных киллинговых векторных полей образует алгебру Ли группы изометрий. В полном римановом многообразии (т. е. в римановом многообразии с полной римановой связностью, для которой каждая геодезическая может быть продолжена до сколь угодно больших значений ее канонического параметра) каждое киллингово векторное поле полно. Поэтому если $M$ полно, то алгебра Ли всех инфинитезимальных изометрий изоморфна алгебре Ли группы группы изометрий. В работе Шмидта [7] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра Ли могла быть реализована как транзитивная алгебра Ли киллинговых векторных полей на однородном римановом пространстве.

Для каждой из указанных в теореме 1 пар найдем теперь группу Ли $\overline{G}$, действие группы Ли $\overline{G}$ на многообразии $M$, инвариантную невырожденную метрику на $M$, полную алгебру изометрий метрики, тензоры кривизны и кручения, проверяем, является ли пространство пространством постоянной кривизны, является ли метрика конформно плоской, является ли связность связностью без кручения, а также систему ОДУ на геодезические относительно связности и ее решения − геодезические.

1.1.1. Сначала вычислим когомологии трехмерных однородных многообразий. Получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\}\}$$

Определим по алгебре локальные координаты группы Ли $\overline{G}$, транзитивно действующей на однородном пространстве. Умножение элемента группы с координатами $(a_1,a_2,a_3,a_4)$ на элемент группы с координатами $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ выглядит следующим образом:

$$(x_1 = a_1 + x_1 e^{(-a_3)}, x_2 = a_2 + x_2 e^{a_3}, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + D_{x_3}, D_{x_4}).$$

Обозначим координаты $(x, y, z)$ на $M$ и вычислим действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_1 + xe^{(-a_3)}, y = a_2 + ye^{a_3}, z = z + a_4).$$

Убеждаемся, что структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с исходными. Тензор $\Omega$ на группе Ли выпишем в виде левоинвариантной формы Мауэра−Картана (с точностью до константы):

$$\Omega = dx_1 dx_2 + dx_2 dx_1 + \beta dx_4 dx_4.$$

Этот тензор является инвариантным относительно подалгебры изотропии. Сведем этот инвариантный тензор на группе Ли $\overline{G}$ к инвариантной невырожденной метрике на $M$:

$$g = dxdy + dydx + \beta dzdz.$$

Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга для метрики. Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(-zD_x + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{D_z}{\beta}, -zD_y + \frac{xD_z}{\beta}, xD_x - yD_y, D_x, D_y).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = 0.$$

Тензор кривизны нулевой. Вычислим первую ковариантную производную кривизны

$$R_1 = 0,$$

убедились, метрика постоянной кривизны, метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой, т.е. связность без кручения.

Если $\{x(t); y(t); z(t)\}$ − кривая на $M$, тогда уравнения геодезических относительно связности –− это система ОДУ второго порядка. Найдем вектор, компоненты которого − уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = C_5 t + C_6, \mathrm{y}(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\right\}.$$

1.1.2. Когомологии:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\},\ H = \{\{\theta_3\}, \{\}, \{\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 + x_1 e^{(-a_3)}, x_2 = a_2 + x_2 e^{(a_4 + a_3)}, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + D_{x_3}, x_2 D_{x_2} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_1 + x e^{(-a_3)}, y = a_2 + y e^{(a_4 + a_3)}, z = z + a_4).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = e^{(-x_4)} dx_1 dx_2 + e^{(-x_4)} dx_2 dx_1 + \beta dx_4 dx_4.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = e^{(-z)} dxdy + e^{(-z)} dydx + \beta dzdz.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(-e^z D_x + \frac{y^2 D_y}{2\beta} + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{yD_y}{\beta} + \frac{D_z}{\beta}, \frac{x^2 D_x}{2\beta} - e^z D_y + \frac{xD_z}{\beta}, xD_x - yD_y, D_x, D_y).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = -\frac{dxD_x dz}{2} + \frac{e^{(-z)} dxD_z dy}{2\beta} - \frac{dyD_y dz}{2} + \frac{e^{(-z)} dyD_z dx}{2\beta} - \frac{dzD_x dx}{2} - \frac{dzD_y dy}{2}.$$

Тензор кривизны:

$$R = -\frac{e^{(-z)} D_x dxdxdy}{4\beta} + \frac{e^{(-z)} D_x dxdydx}{4\beta} - \frac{D_x dzdxdz}{4} + \frac{D_x dzdzdx}{4} + \frac{e^{(-z)} D_y dydxdy}{4\beta} -$$

$$-\frac{e^{(-z)} D_y dydydx}{4\beta} - \frac{D_y dzdydz}{4} + \frac{D_y dzdzdy}{4} + \frac{e^{(-z)} D_z dxdydz}{4\beta} - \frac{e^{(-z)} D_z dxdzdy}{4\beta} +$$

$$+\frac{e^{(-z)} D_z dydxdz}{4\beta} - \frac{e^{(-z)} D_z dydzdx}{4\beta}.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой, т.е. связность без кручения. Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))e^{(-z(t))} + (\frac{d^2}{dt^2}z(t))\beta}{\beta} = 0, -(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}x(t)) = 0,\right.$$

$$\left. -(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}y(t)) = 0\right\}.$$

Решая эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t) = (C_3 + C_4\,y(t))(\frac{d}{dt}y(t)), z(t) = C_2 + C_3 t + C_4\int y(t)dt,\ x(t) = -C_4\beta\int e^{(C_2+C_3 t+C_4\int y(t)dt)}\,dt + C_1\right).$$

1.1.6. Когомологии:

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\bar{G}$:

$$(x_1 = a_1 + a_2 a_3 x_4 + a_2 x_3 e^{a_4} a_4 + a_2 x_3 e^{a_4} x_4 - a_2 x_3 e^{a_4} + x_2 e^{(-a_4)} a_3 a_4 +$$

$$+x_2 e^{(-a_4)} a_3 x_4 + x_2 x_3 a_4 + x_1, x_2 = a_2 + x_2 e^{(-a_4)}, x_3 = a_3 + x_3 e^{a_4}, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, (x_3 x_4 - x_3)D_{x_1} + D_{x_2}, x_2 x_4 D_{x_1} + D_{x_3}, x_2 x_3 D_{x_1} - x_2 D_{x_2} + x_3 D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\bar{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_2 + xe^{(-a_4)}, y = a_3 + ye^{a_4}, z = -a_1 + a_2 ye^{a_4} + z + a_4 a_2 a_3).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = \beta dx_1 dx_1 - \beta x_3 x_4 dx_1 dx_2 - \beta(x_4 - 1)x_2 dx_1 dx_3 - \beta x_2 x_3 dx_1 dx_4 -$$

$$-\beta x_3 x_4 dx_2 dx_1 + \beta x_3^2 x_4^2 dx_2 dx_2 + (\beta x_3 x_4^2 x_2 - \beta x_3 x_4 x_2 + \alpha)dx_2 dx_3 +$$

$$+\beta x_3^2 x_4 x_2 dx_2 dx_4 - \beta(x_4 - 1)x_2 dx_3 dx_1 + (\beta x_3 x_4^2 x_2 - \beta x_3 x_4 x_2 + \alpha)dx_3 dx_2 +$$

$$+\beta(x_4 - 1)^2 x_2^2 dx_3 dx_3 + \beta(x_4 - 1)x_2^2 x_3 dx_3 dx_4 - \beta x_2 x_3 dx_4 dx_1 +$$

$$+\beta x_3^2 x_4 x_2 dx_4 dx_2 + \beta(x_4 - 1)x_2^2 x_3 dx_4 dx_3 + \beta x_2^2 x_3^2 dx_4 dx_4.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$ :

$$g = \alpha dxdy + \alpha dydx + \beta x^2 dydy - \beta xdydz - \beta xdzdy + \beta dzdz.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$ :

$$(\frac{D_x}{\beta} + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{D_z}{\beta}, \frac{xD_x}{\beta} - \frac{yD_y}{\beta}, -\frac{D_y}{\beta}).$$

Символы Кристоффеля для $g$ :

$$C = \frac{\beta xdxD_x dy}{2\alpha} - \frac{\beta dxD_x dz}{2\alpha} - \frac{dxD_z dy}{2} + \frac{\beta xdyD_x dx}{2\alpha} - \frac{\beta xdyD_y dy}{\alpha} + \frac{\beta dyD_y dz}{2\alpha} - \frac{dyD_z dx}{2} -$$

$$-\frac{x^2\beta dyD_z dy}{\alpha} + \frac{\beta xdyD_z dz}{2\alpha} - \frac{\beta dzD_x dx}{2\alpha} + \frac{\beta dzD_y dy}{2\alpha} + \frac{\beta xdzD_z dy}{2\alpha}.$$

Тензор кривизны:

$$R = -\frac{\beta^2 D_x dzdxdz}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 D_x dzdzdx}{4\alpha^2} - \frac{3\beta D_y dydxdy}{4\alpha} + \frac{3\beta D_y dydydx}{4\alpha} - \frac{\beta^2 D_y dzdydz}{4\alpha^2} +$$

$$+\frac{\beta^2 D_y dzdzdy}{4\alpha^2} + \frac{\beta D_z dxdydz}{4\alpha} - \frac{\beta D_z dxdzdy}{4\alpha} + \frac{\beta D_z dydxdz}{4\alpha} - \frac{\beta D_z dydzdx}{4\alpha} + \frac{3\beta D_x dxdxdy}{4\alpha} -$$

$$-\frac{3\beta D_x dxdydx}{4\alpha} + \frac{\beta^2 x^2 D_x dydydx}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2 xD_x dydzdx}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 xD_x dzdxdy}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2 xD_x dzdydx}{4\alpha^2} +$$

$$+\frac{\beta^2 xD_y dydydz}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2 xD_y dydzdy}{4\alpha^2} - \frac{\beta xD_z dydxdy}{\alpha} + \frac{\beta xD_z dydydx}{\alpha} + \frac{\beta^2 x^2 D_z dydydz}{4\alpha^2} -$$

$$-\frac{\beta^2 x^2 D_z dydzdy}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2 xD_z dzdydz}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 xD_z dzdzdy}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2 x^2 D_x dydxdy}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 xD_x dydxdz}{4\alpha^2}.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика не является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = -\frac{\beta^2 D_x dxdxdzdy}{2\alpha^2} - \frac{\beta^2 D_x dxdydzdx}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2 D_x dxdzdxdy}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2 D_x dxdzdydx}{2\alpha^2} +$$

$$+\frac{\beta^2 D_x dzdxdydx}{2\alpha^2} - \frac{\beta^2 D_x dzdydxdx}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2 D_y dydxdzdy}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2 D_y dydydzdx}{2\alpha^2} -$$

$$-\frac{\beta^2 D_y dydzdxdy}{2\alpha^2} - \frac{\beta^2 D_y dydzdydx}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2 D_y dzdxdydy}{2\alpha^2} - \frac{\beta^2 D_y dzdydxdy}{2\alpha^2} -$$

$$-\frac{\beta D_z dxdxdydy}{2\alpha} + \frac{\beta D_z dxdydxdy}{2\alpha} - \frac{\beta D_z dydxdydx}{2\alpha} + \frac{\beta D_z dydydxdx}{2\alpha} +$$

$$+\frac{\beta^2 x^2 D_z\, dydydxdy}{\alpha^2}+\frac{\beta^2 xD_z\, dydydzdx}{2\alpha^2}-\frac{\beta^2 xD_z\, dydzdxdy}{2\alpha^2}-\frac{\beta^2 xD_z\, dydzdydx}{2\alpha^2}+$$

$$+\frac{\beta^2 xD_z\, dzdxdydy}{2\alpha^2}-\frac{\beta^2 xD_z\, dzdydxdy}{2\alpha^2}+\frac{\beta^2 xD_x\, dxdxdydy}{2\alpha^2}-\frac{\beta^2 xD_x\, dxdydxdy}{2\alpha^2}-$$

$$-\frac{\beta^2 xD_x\, dydxdydx}{2\alpha^2}+\frac{\beta^2 xD_x\, dydydxdx}{2\alpha^2}-\frac{\beta^2 xD_y\, dydxdydy}{\alpha^2}+\frac{\beta^2 xD_y\, dydydxdy}{\alpha^2}-$$

$$-\frac{\beta^2 x^2 D_z\, dydxdydy}{\alpha^2}+\frac{\beta^2 xD_z\, dydxdzdy}{2\alpha^2}.$$

Метрика не является конформно плоской:

$$\frac{\beta^2 D_x D_y}{2\alpha^3}+\frac{\beta^2 xD_x D_z}{2\alpha^3}+\frac{\beta^2 D_y D_x}{2\alpha^3}+\frac{\beta^2 xD_z D_x}{2\alpha^3}-\frac{\beta D_z D_z}{\alpha^2}.$$

Тензор кручения нулевой, т.е. связность без кручения. Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{-(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta+(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\beta x(t)+(\frac{d^2}{dt^2}x(t))\alpha}{\alpha}=0,\right.$$

$$-\frac{-(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta+(\frac{d}{dt}y(t))^2\beta x(t)-(\frac{d^2}{dt^2}y(t))\alpha}{\alpha}=0,$$

$$\left.-\frac{-(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta x(t)+(\frac{d}{dt}y(t))^2 x(t)^2\beta+(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\alpha-(\frac{d^2}{dt^2}z(t))\alpha}{\alpha}=0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left\{x(t)=\frac{C_3\beta C_5+\alpha e^{(\frac{\beta(C_5t+C_6)}{\alpha})}C_4}{\beta C_5},\, y(t)=-\frac{-C_1\beta C_5+\alpha e^{(-\frac{\beta(C_5t+C_6)}{\alpha})}C_2}{\beta C_5},\; z(t)=C_5t+C_6\right\}$$

Метрика достаточно проста, но ее можно еще упростить. Пусть:

$$(d\Theta_1=0, d\Theta_2=0, d\Theta_3=-\Theta_1\wedge\Theta_2).$$

Тогда новая метрика:

$$g_1=\alpha\omega_1\omega_2+\alpha\omega_2\omega_1+\beta\omega_3\omega_3.$$

Символы Кристоффеля:

$$C = -\frac{\beta\omega_1 E_1 \omega_3}{2\alpha} - \frac{\omega_1 E_3 \omega_2}{2} + \frac{\beta\omega_2 E_2 \omega_3}{2\alpha} + \frac{\omega_2 E_3 \omega_1}{2} - \frac{\beta\omega_3 E_1 \omega_1}{2\alpha} + \frac{\beta\omega_3 E_2 \omega_2}{2\alpha}.$$

Тензор кривизны:

$$R = \frac{3\beta E_1 \omega_1 \omega_1 \omega_2}{4\alpha} - \frac{3\beta E_1 \omega_1 \omega_2 \omega_1}{4\alpha} - \frac{\beta^2 E_1 \omega_3 \omega_1 \omega_3}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 E_1 \omega_3 \omega_3 \omega_1}{4\alpha^2} - \frac{3\beta E_2 \omega_2 \omega_1 \omega_2}{4\alpha} +$$

$$+\frac{3\beta E_2 \omega_2 \omega_2 \omega_1}{4\alpha} - \frac{\beta^2 E_2 \omega_3 \omega_2 \omega_3}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 E_2 \omega_3 \omega_3 \omega_2}{4\alpha^2} + \frac{\beta E_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3}{4\alpha} - \frac{\beta E_3 \omega_1 \omega_3 \omega_2}{4\alpha} +$$

$$+\frac{\beta E_3 \omega_2 \omega_1 \omega_3}{4\alpha} - \frac{\beta E_3 \omega_2 \omega_3 \omega_1}{4\alpha}.$$

Метрика не является конформно плоской:

$$\frac{\beta^2 E_1 E_2}{2\alpha^3} + \frac{\beta^2 E_2 E_1}{2\alpha^3} - \frac{\beta E_3 E_3}{\alpha^2}.$$

Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta + (\frac{d^2}{dt^2}y(t))\alpha}{\alpha} = 0, -\frac{(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t))\beta - (\frac{d^2}{dt^2}x(t))\alpha}{\alpha} = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = \frac{C_3\beta C_5 + \alpha e^{(\frac{\beta(C_5 t + C_6)}{\alpha})} C_4}{\beta C_5}, y(t) = -\frac{-C_1\beta C_5 + \alpha e^{(-\frac{\beta(C_5 t + C_6)}{\alpha})} C_2}{\beta C_5},\right.$$

$$\left. z(t) = C_5 t + C_6\right\}.$$

### 1.3.1. Когомологии:

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 - x_2\sin(a_3) + x_1\cos(a_3), x_2 = a_2 + x_2\cos(a_3) + x_1\sin(a_3), x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_2 D_{x_1} + x_1 D_{x_2} + D_{x_3}, D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_1 - y\sin(a_3) + x\cos(a_3), y = a_2 + y\cos(a_3) + x\sin(a_3), z = z + a_4).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a dx_1 dx_1 + a dx_2 dx_2 + \beta dx_4 dx_4.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$ :

$$g = a dx dx + a dy dy + \beta dz dz.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$ :

$$(-\frac{zD_y}{a} + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{D_z}{\beta}, -\frac{zD_x}{a} + \frac{xD_z}{\beta}, -\frac{yD_x}{a} + \frac{xD_y}{a}, \frac{D_y}{a}, \frac{D_x}{a}).$$

Символы Кристоффеля для $g$ :

$$C = 0.$$

Тензор кривизны нулевой. Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой, т.е. связность без кручения. Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_5 t + C_6, y(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\}.$$

1.3.2. Когомологии:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\},\ H = \{\{\theta_3\}, \{\}, \{\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 - x_2 e^{a_4} \sin(a_3) + x_1 e^{a_4} \cos(a_3), x_2 = a_2 + x_2 e^{a_4} \cos(a_3) + x_1 e^{a_4} \sin(a_3), x_3 = x_3 + a_3,\ x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_2 D_{x_1} + x_1 D_{x_2} + D_{x_3}, x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$ :

$$(x = a_1 - ye^{a_4} \sin(a_3) + xe^{a_4} \cos(a_3), y = a_2 + ye^{a_4} \cos(a_3) + xe^{a_4} \sin(a_3), z = z + a_4).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = ae^{(-2x_4)}dx_1dx_1 + ae^{(-2x_4)}dx_2dx_2 + \beta dx_4dx_4.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = ae^{(-2z)}dxdx + ae^{(-2z)}dydy + \beta dzdz.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$\left(\frac{xyD_x}{\beta} - \frac{e^{(2z)}(\beta - e^{(-2z)}ay^2 + e^{(-2z)}ax^2)D_y}{2a\beta} + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{xD_x}{\beta} + \frac{yD_y}{\beta} + \frac{D_z}{\beta},\right.$$

$$\left.\frac{e^{(2z)}(-\beta + e^{(-2z)}ax^2 - e^{(-2z)}ay^2)D_x}{2a\beta} + \frac{xyD_y}{\beta} + \frac{xD_z}{\beta}, -\frac{yD_x}{a} + \frac{xD_y}{a}, \frac{D_y}{a}, \frac{D_x}{a}\right).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = -dxD_xdz + \frac{ae^{(-2z)}dxD_zdx}{\beta} - dyD_ydz + \frac{ae^{(-2z)}dyD_zdy}{\beta} - dzD_xdx - dzD_ydy.$$

Тензор кривизны:

$$R = -\frac{ae^{(-2z)}D_xdydxdy}{\beta} + \frac{ae^{(-2z)}D_xdydydx}{\beta} - D_xdzdxdz + D_xdzdzdx +$$

$$+\frac{ae^{(-2z)}D_ydxdxdy}{\beta} - \frac{ae^{(-2z)}D_ydxdydx}{\beta} - D_ydzdydz + D_ydzdzdy +$$

$$+\frac{ae^{(-2z)}D_zdxdxdz}{\beta} - \frac{ae^{(-2z)}D_zdxdzdx}{\beta} + \frac{ae^{(-2z)}D_zdydydz}{\beta} - \frac{ae^{(-2z)}D_zdydzdy}{\beta}.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской. Тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{(\frac{d}{dt}y(t))^2ae^{(-2z(t))} + (\frac{d}{dt}x(t))^2ae^{(-2z(t))} + (\frac{d^2}{dt^2}z(t))\beta}{\beta} = 0,\right.$$

$$\left.-2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}x(t)) = 0, -2(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}y(t)) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = -\frac{C_3\sqrt{-\frac{(4C_3a+\beta)a}{C_3}}\,\mathrm{th}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2})}{aC_2}+C_1, y(t) = -\frac{2C_3(\mathrm{sh}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))}{C_2(\mathrm{ch}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))}+C_5,\right.$$

$$\left. z(t) = \frac{1}{2}\ln(-\frac{C_3}{C_2{}^2}+\frac{C_3(\mathrm{sh}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))^2}{C_2{}^2(\mathrm{ch}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))^2})\right\},$$

$$\left\{x(t) = \frac{C_3\sqrt{-\frac{(4C_3a+\beta)a}{C_3}}\,\mathrm{th}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2})}{aC_2}+C_1, y(t) = -\frac{2C_3(\mathrm{sh}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))}{C_2(\mathrm{ch}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))}+C_5,\right.$$

$$\left. z(t) = \frac{1}{2}\ln(-\frac{C_3}{C_2{}^2}+\frac{C_3(\mathrm{sh}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))^2}{C_2{}^2(\mathrm{ch}(\frac{t}{2C_2}+\frac{C_4}{2C_2}))^2})\right\}.$$

$$\left\{x(t) = -\frac{C_3(-\frac{(4C_3a+\beta)a}{C_3})^{(\frac{1}{2})}\mathrm{th}(\frac{(t+C_4)}{2C_2})-C_1aC_2}{aC_2},\right.$$

$$\left. y(t) = -\frac{2C_3\sinh(\frac{t+C_4}{2C_2})-C_5C_2\,\mathrm{ch}(\frac{t+C_4}{2C_2})}{C_2\,\mathrm{ch}(\frac{t+C_4}{2C_2})}, z(t) = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{C_3}{C_2{}^2\,\mathrm{ch}(\frac{t+C_4}{2C_2})^2}\right)\right\}.$$

1.3.7. Когомологии:

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = -x_2x_3\cos(a_4)^2 - a_2x_2\sin(a_4) - a_2x_3\cos(a_4) - \frac{x_2{}^2\cos(a_4)\sin(a_4)}{2} + \frac{x_3{}^2\cos(a_4)\sin(a_4)}{2} + a_1 +$$

$$+x_3x_2 + x_1 + \frac{a_3{}^2x_4}{2} + \frac{x_2{}^2a_4}{2} + \frac{x_3{}^2a_4}{2} + \frac{a_2{}^2x_4}{2} + a_2a_4x_2\cos(a_4) - a_2a_4x_3\sin(a_4) + a_2x_4x_2\cos(a_4) -$$

$$-a_2x_4x_3\sin(a_4) + a_3a_4x_2\sin(a_4) + a_3a_4x_3\cos(a_4) + a_3x_4x_2\sin(a_4) + a_3x_4x_3\cos(a_4),$$

$$x_2 = a_2 + x_2\cos(a_4) - x_3\sin(a_4), x_3 = a_3 + x_2\sin(a_4) + x_3\cos(a_4), x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, (x_2 x_4 - x_3) D_{x_1} + D_{x_2}, x_3 x_4 D_{x_1} + D_{x_3}, x_3{}^2 D_{x_1} - x_3 D_{x_2} + x_2 D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_2 + x\cos(a_4) - y\sin(a_4), y = a_3 + x\sin(a_4) + y\cos(a_4), z = 2a_2 x\sin(a_4) -$$

$$-y^2\cos(a_4)\sin(a_4) + x^2\cos(a_4)\sin(a_4) + 2a_2 y\cos(a_4) + z - 2a_1 + 2xy\cos(a_4)^2 - 2yx +$$

$$+a_4 a_2{}^2 + a_4 a_3{}^2).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a dx_1 dx_1 - a x_2 x_4 dx_1 dx_2 + a(x_2 - x_3 x_4) dx_1 dx_3 - \frac{a(x_2{}^2 + x_3{}^2) dx_1 dx_4}{2} - a x_2 x_4 dx_2 dx_1 +$$

$$+(a x_2{}^2 x_4{}^2 + \beta) dx_2 dx_2 - a x_2 x_4 (x_2 - x_3 x_4) dx_2 dx_3 + \frac{a x_2 x_4 (x_2{}^2 + x_3{}^2) dx_2 dx_4}{2} +$$

$$+a(x_2 - x_3 x_4) dx_3 dx_1 - a x_2 x_4 (x_2 - x_3 x_4) dx_3 dx_2 + (a x_2{}^2 - 2a x_2 x_3 x_4 + a x_3{}^2 x_4{}^2 + \beta) dx_3 dx_3 -$$

$$-\frac{a(x_2 - x_3 x_4)(x_2{}^2 + x_3{}^2) dx_3 dx_4}{2} - \frac{a(x_2{}^2 + x_3{}^2) dx_4 dx_1}{2} + \frac{a x_2 x_4 (x_2{}^2 + x_3{}^2) dx_4 dx_2}{2} -$$

$$-\frac{a(x_2 - x_3 x_4)(x_2{}^2 + x_3{}^2) dx_4 dx_3}{2} + \frac{a(x_2{}^2 + x_3{}^2)^2 dx_4 dx_4}{4}.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = \beta dx dx + (a x^2 + \beta) dy dy - \frac{a x dy dz}{2} - \frac{a x dz dy}{2} + \frac{a dz dz}{4}.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(-\frac{2D_y}{a}, \frac{4D_z}{a}, \frac{2D_x}{a} + \frac{4yD_z}{a}, \frac{2yD_x}{a} - \frac{2xD_y}{a} - \frac{2(-y^2 + x^2)D_z}{a}).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = \frac{a x dx D_y dy}{2\beta} - \frac{a dx D_y dz}{4\beta} + \frac{(a x^2 - \beta) dx D_z dy}{\beta} - \frac{a x dx D_z dz}{2\beta} - \frac{a x dy D_x dy}{\beta} + \frac{a dy D_x dz}{4\beta} +$$

$$+\frac{a x dy D_y dx}{2\beta} + \frac{(a x^2 - \beta) dy D_z dx}{\beta} + \frac{a dz D_x dy}{4\beta} - \frac{a dz D_y dx}{4\beta} - \frac{a x dz D_z dx}{2\beta}.$$

Тензор кривизны:

$$R = \frac{a(ax^2 - 3\beta)D_x\, dydxdy}{4\beta^2} - \frac{a^2 xD_x\, dydxdz}{8\beta^2} - \frac{a(ax^2 - 3\beta)D_x\, dydydx}{4\beta^2} + \frac{a^2 xD_x\, dydzdx}{8\beta^2} -$$

$$- \frac{a^2 xD_x\, dzdxdy}{8\beta^2} + \frac{a^2 D_x\, dzdxdz}{16\beta^2} + \frac{a^2 xD_x\, dzdydx}{8\beta^2} - \frac{a^2 D_x\, dzdzdx}{16\beta^2} + \frac{3aD_y\, dxdxdy}{4\beta} -$$

$$- \frac{3aD_y\, dxdydx}{4\beta} - \frac{a^2 xD_y\, dydydz}{8\beta^2} + \frac{a^2 xD_y\, dydzdy}{8\beta^2} + \frac{a^2 D_y\, dzdydz}{16\beta^2} - \frac{a^2 D_y\, dzdzdy}{16\beta^2} +$$

$$+ \frac{2axD_z\, dxdxdy}{\beta} - \frac{aD_z\, dxdxdz}{4\beta} - \frac{2axD_z\, dxdydx}{\beta} + \frac{aD_z\, dxdzdx}{4\beta} - \frac{(ax^2 + \beta)aD_z\, dydydz}{4\beta^2} +$$

$$+ \frac{(ax^2 + \beta)aD_z\, dydzdy}{4\beta^2} + \frac{a^2 xD_z\, dzdydz}{8\beta^2} - \frac{a^2 xD_z\, dzdzdy}{8\beta^2}.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика не является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = -\frac{a^2 D_x\, dydxdzdx}{4\beta^2} - \frac{a^2 D_x\, dydydzdy}{4\beta^2} + \frac{a^2 D_x\, dydzdxdx}{4\beta^2} + \frac{a^2 D_x\, dydzdydy}{4\beta^2} -$$

$$- \frac{a^2 D_x\, dzdxdydx}{4\beta^2} + \frac{a^2 D_x\, dzdydxdx}{4\beta^2} + \frac{a^2 D_y\, dxdxdzdx}{4\beta^2} + \frac{a^2 D_y\, dxdydzdy}{4\beta^2} -$$

$$- \frac{a^2 D_y\, dxdzdxdx}{4\beta^2} - \frac{a^2 D_y\, dxdzdydy}{4\beta^2} - \frac{a^2 D_y\, dzdxdydy}{4\beta^2} + \frac{a^2 D_y\, dzdydxdy}{4\beta^2} +$$

$$+ \frac{(ax^2 + \beta)aD_z\, dydxdydy}{\beta^2} - \frac{(ax^2 + \beta)aD_z\, dydydxdy}{\beta^2} - \frac{a^2 xD_z\, dzdxdydy}{2\beta^2} +$$

$$+ \frac{a^2 xD_z\, dzdydxdy}{2\beta^2} - \frac{a^2 xD_y\, dxdxdydx}{2\beta^2} + \frac{a^2 xD_y\, dxdydxdx}{2\beta^2} + \frac{a^2 xD_y\, dydxdydy}{2\beta^2} -$$

$$- \frac{a^2 xD_y\, dydydxdy}{2\beta^2} - \frac{a(ax^2 - \beta)D_z\, dxdxdydx}{\beta^2} + \frac{a^2 xD_z\, dxdxdzdx}{2\beta^2} +$$

$$+ \frac{a(ax^2 - \beta)D_z\, dxdydxdx}{\beta^2} + \frac{a^2 xD_z\, dxdydzdy}{2\beta^2} - \frac{a^2 xD_z\, dxdzdxdx}{2\beta^2} - \frac{a^2 xD_z\, dxdzdydy}{2\beta^2} +$$

$$+ \frac{a^2 xD_x\, dydxdydx}{\beta^2} - \frac{a^2 xD_x\, dydydxdx}{\beta^2}.$$

Метрика является конформно плоской:

$$-\frac{a^2 D_x D_x}{4\beta^3}-\frac{a^2 D_y D_y}{4\beta^3}-\frac{a^2 x D_y D_z}{2\beta^3}-\frac{a^2 x D_z D_y}{2\beta^3}-\frac{a(ax^2-2\beta)D_z D_z}{\beta^3}.$$

Тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{-(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t))ax(t)+2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))ax(t)^2-2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\beta+(\frac{d^2}{dt^2}z(t))\beta}{\beta}=0,\right.$$

$$\frac{1(-(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t))a+2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))ax(t)+2(\frac{d^2}{dt^2}y(t))\beta)}{2\beta}=0,$$

$$\left.-\frac{1(-(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))a+2(\frac{d}{dt}y(t))^2ax(t)-2(\frac{d^2}{dt^2}x(t))\beta)}{2\beta}=0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t)=C_3, y(t)=C_4, z(t)=C_1t+C_2\},\{x(t)=C_2t+C_3, y(t)=C_4, z(t)=C_1\},$$

$$\{x(t)=C_2, y(t)=C_3t+C_4, z(t)=2C_2C_3t+C_1\},$$

$$\{x(t)=C_2t+C_3, y(t)=C_4t+C_5, z(t)=2C_4(\frac{1}{2}C_2t^2+C_3t)+C_1\},$$

$$\left\{x(t)=\int\frac{1}{2}\frac{C_3\sqrt{v}(1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4)}{-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4}dt+C_2,\quad y(t)=-\frac{1}{2}\frac{C_3{}^2}{e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}}-\frac{1}{2}C_3{}^2e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}C_4+C_6, z(t)=\right.$$

$$\left.=\int\frac{\left(C_3{}^2\sqrt{v}a\int\frac{1}{2}\frac{C_3\sqrt{v}(1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4)}{-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4}dt+C_3{}^2\sqrt{v}aC_2+2\beta\right)(-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4)}{a\sqrt{v}e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}C_3}dt+C_1\right\},$$

$$\left\{x(t)=\int-\frac{1}{2}\frac{C_3\sqrt{v}(1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4)}{-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2sC_4}dt+C_2,\right.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\frac{{C_3}^2}{e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}} - \frac{1}{2}{C_3}^2 e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}C_4 + C_6, z(t) =$$

$$\left. = \int \frac{\left( {C_3}^2\sqrt{v}\,a\int -\frac{1}{2}\frac{C_3\sqrt{v}(1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2 sC_4)}{-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2 sC_4}dt + {C_3}^2\sqrt{v}\,aC_2 - 2\beta \right)(-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2 sC_4)}{a\sqrt{v}\,e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}C_3}dt + C_1 \right\},$$

$$\left\{ x(t) = \int \frac{1}{2}w\,dt + C_2,\ y(t) = \frac{1}{2}{C_3}^2 e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})} + \frac{1}{2}\frac{{C_3}^2 C_4}{e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}} + C_6, \right.$$

$$\left. z(t) = \int \frac{\left( {C_3}^2\sqrt{u}\,a\int \frac{1}{2}w\,dt + 2\beta + {C_3}^2\sqrt{u}\,aC_2 \right)((e^{(\frac{t}{C_3})})^2 s - C_4)}{a\sqrt{u}\,e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}C_3}dt + C_1 \right\},$$

$$\left\{ x(t) = \int -\frac{1}{2}w\,dt + C_2,\ y(t) = \frac{1}{2}{C_3}^2 e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})} + \frac{1}{2}\frac{{C_3}^2 C_4}{e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}} + C_6, \right.$$

$$\left. z(t) = \int \frac{\left( {C_3}^2\sqrt{u}\,a\int -\frac{1}{2}w\,dt - 2\beta + {C_3}^2\sqrt{u}\,aC_2 \right)((e^{(\frac{t}{C_3})})^2 s - C_4)}{a\sqrt{u}\,e^{(\frac{t}{C_3})}e^{(\frac{C_5}{C_3})}C_3}dt + C_1 \right\},$$

где

$$u = -\frac{((e^{(\frac{t}{C_3})})^2(e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2 - C_4)^2}{(e^{(\frac{t}{C_3})})^2(e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2},\ w = \frac{C_3\sqrt{u}((e^{(\frac{t}{C_3})})^2(e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2 + C_4)}{(e^{(\frac{t}{C_3})})^2(e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2 - C_4},$$

$$v = -\frac{(-1+(e^{(\frac{t}{C_3})})^2(e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2 C_4)^2}{(e^{(\frac{t}{C_3})})^2(e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2},\ s = (e^{(\frac{C_5}{C_3})})^2.$$

Упростим метрику:

$$(d\Theta_1 = 0, d\Theta_2 = 0, d\Theta_3 = -\Theta_1 \wedge \Theta_2).$$

$$g_1 = \beta\omega_1\omega_1 + \beta\omega_2\omega_2 + a\omega_3\omega_3.$$

$$C = -\frac{a\omega_1 E_2 \omega_3}{2\beta} - \frac{\omega_1 E_3 \omega_2}{2} + \frac{a\omega_2 E_1 \omega_3}{2\beta} + \frac{\omega_2 E_3 \omega_1}{2} + \frac{a\omega_3 E_1 \omega_2}{2\beta} - \frac{a\omega_3 E_2 \omega_1}{2\beta}.$$

Тензор кривизны:

$$R = -\frac{3aE_1\omega_2\omega_1\omega_2}{4\beta} + \frac{3aE_1\omega_2\omega_2\omega_1}{4\beta} + \frac{a^2 E_1\omega_3\omega_1\omega_3}{4\beta^2} - \frac{a^2 E_1\omega_3\omega_3\omega_1}{4\beta^2} + \frac{3aE_2\omega_1\omega_1\omega_2}{4\beta} -$$

$$-\frac{3aE_2\omega_1\omega_2\omega_1}{4\beta} + \frac{a^2 E_2\omega_3\omega_2\omega_3}{4\beta^2} - \frac{a^2 E_2\omega_3\omega_3\omega_2}{4\beta^2} - \frac{aE_3\omega_1\omega_1\omega_3}{4\beta} + \frac{aE_3\omega_1\omega_3\omega_1}{4\beta} -$$

$$-\frac{aE_3\omega_2\omega_2\omega_3}{4\beta} + \frac{aE_3\omega_2\omega_3\omega_2}{4\beta}.$$

Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}z(t))a + (\frac{d^2}{dt^2}x(t))\beta}{\beta} = 0, -\frac{(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}z(t))a - (\frac{d^2}{dt^2}y(t))\beta}{\beta} = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left\{C_2 + \int u\,dt = C_3 t + C_4, C_3 t + C_4 = C_5, y(t) = C_1 t + C_2\right\},$$

где $u$ − решение ДУ

$$\frac{(\frac{d^2}{dt^2}u(t))\beta^2 + C_3{}^2 a^2 u(t)}{\beta^2} = 0.$$

### 1.8.1. Когомологии:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 + a_2 x_3 - \frac{x_4 a_3{}^2}{2} - x_4 x_3 a_3 + x_1, x_2 = a_2 - a_3 x_4 + x_2, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, x_3 D_{x_1} + D_{x_2}, -x_3 x_4 D_{x_1} - x_4 D_{x_2} + D_{x_3}, D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_2 - a_3 z + x, y = -a_1 - \frac{z a_3^2}{2} + y + a_3 a_2 + a_3 x, z = z + a_4).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a_1 dx_1 dx_4 - a_1 dx_2 dx_2 - a_1 x_3 dx_2 dx_4 - a_1 x_2 dx_3 dx_4 + a_1 dx_4 dx_1 - a_1 x_3 dx_4 dx_2 -$$

$$-a_1 x_2 dx_4 dx_3.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = -a_1 dxdx - a_1 dydz - a_1 dzdy.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(-\frac{yD_y}{a_1} + \frac{zD_z}{a_1}, -\frac{D_y}{a_1}, \frac{zD_x}{a_1} - \frac{xD_y}{a_1}, \frac{yD_x}{a_1} - \frac{xD_z}{a_1}, -\frac{D_z}{a_1}, -\frac{D_x}{a_1}).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = 0.$$

Тензор кривизны нулевой. Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской. Тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_5 t + C_6, \mathrm{y}(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\}.$$

1.8.3. Когомологии:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \; H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

При $a > -1/4$. Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = (a_1 a + a_1 - x_3 e^{a_4} a_2 + x_3 e^{a_4} a_2 a + a a_3 x2 e^{(a a_4)} - a^2 a_3 x_2 e^{(a a_4)} +$$

$$+x_1 e^{((a+1)a_4)} a + x_1 e^{((a+1)a_4)}) / (a+1), x_2 = a_2 + x_2 e^{(a a_4)}, x_3 = a_3 + x_3 e^{a_4}, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, \frac{(-1+a)x_3 D_{x_1}}{a+1} + D_{x_2}, -\frac{(-1+a)a x_2 D_{x_1}}{a+1} + D_{x_3}, (x_1 a + x_1)D_{x_1} + a x_2 D_{x_2} + x_3 D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = x + a_4, y = a_3 + y e^{a_4} - a_2 e^{(-(-1+a)(x+a_4))}, z = \frac{1}{2}(-a^2 e^{(x+a_4)} a_2{}^2 + 2e^{(a(x+a_4))} a^2 a_2 a_3 +$$

$$+2e^{(ax+aa_4+a_4)} a^2 y a_2 + 2e^{(a(x+a_4))} a a_1 + 2e^{(2aa_4+a_4+ax)} az - 2e^{(a(x+a_4))} a a_2 a_3 +$$

$$+2e^{(2aa_4+a_4+ax)} z + 2e^{(a(x+a_4))} a_1 - 2e^{(ax+aa_4+a_4)} y a_2 + e^{(x+a_4)} a_2{}^2) e^{(-a(x+a_4))} / (a+1)).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a_1 e^{(-(a+1)x_4)} dx_1 dx_4 - a_1 e^{(-2ax_4)} dx_2 dx_2 + a_1 e^{(-(a+1)x_4)} dx_2 dx_3 +$$

$$+\frac{a_1 x_3 a(-1+a) e^{(-(a+1)x_4)} dx_2 dx_4}{a+1} + a_1 e^{(-(a+1)x_4)} dx_3 dx_2 - a_1 e^{(-2x_4)} dx_3 dx_3 -$$

$$-\frac{a_1 x_2 (-1+a) e^{(-(a+1)x_4)} dx_3 dx_4}{a+1} + a_1 e^{(-(a+1)x_4)} dx_4 dx_1 +$$

$$+\frac{a_1 x_3 a(-1+a) e^{(-(a+1)x_4)} dx_4 dx_2}{a+1} - \frac{a_1 x_2 (-1+a) e^{(-(a+1)x_4)} dx_4 dx_3}{a+1}.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = a_1 e^{(-(a+1)x)} dxdz - a_1 e^{(-2x)} dydy + a_1 e^{(-(a+1)x)} dzdx.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(\frac{D_x}{a_1} + \frac{yD_y}{a_1} + \frac{z(a+1)D_z}{a_1}, -\frac{D_y}{a_1}, -\frac{e^{(-(-1+a)x)} D_y}{a_1} + \frac{(-1+a)yD_z}{a_1}, \frac{D_z}{a_1}).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = (-a-1)dx D_x dx - dx D_y dy - dy D_y dx - e^{((-1+a)x)} dy D_z dy.$$

Тензор кривизны:

$$R = -aD_y dxdxdy + aD_y dxdydx - e^{((-1+a)x)} aD_z dydxdy + e^{((-1+a)x)} aD_z dydydx.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика не является метрикой постоянной кривизны:

$$(-2a-2a^2)D_y dxdxdydx + (2a+2a^2)D_y dxdydxdx - 2(a+1)e^{((-1+a)x)} aD_z dydxdydx +$$

$$+2(a+1)e^{((-1+a)x)} aD_z dydydxdx,$$

Метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\{-2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}y(t)) = 0, -(\frac{d}{dt}y(t))^2 e^{((-1+a)x(t))} + (\frac{d^2}{dt^2}z(t)) = 0,$$

$$-(\frac{d}{dt}x(t))^2 a - (\frac{d}{dt}x(t))^2 + (\frac{d^2}{dt^2}x(t)) = 0\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = -\frac{ln((-(a+1)(C_5 t + C_6)))}{a+1}, y(t) = (-C_3 C_5 + C_3 C_5 a +$$

$$+(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{2}{a+1})} C_4 C_5 t a + (-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{2}{a+1})} C_4 C_5 t +$$

$$+(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{2}{a+1})} C_4 a C_6 + (-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{2}{a+1})} C_4 C_6) / (C_5(-1+a)),$$

$$z(t) = -((-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 a^2 C_5^2 t^2 + 2(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 a^2 C_5 t C_6 +$$

$$+(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 a^2 C_6^2 + 2(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 a C_5^2 t^2 +$$

$$+4(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 a C_5 t C_6 + 2(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 a C_6^2 +$$

$$+(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 C_5^2 t^2 + 2(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 C_5 t C_6 +$$

$$+(-(a+1)(C_5 t + C_6))^{(-\frac{a+3}{a+1})} C_4^2 C_6^2 + 2C_1 t C_5^2 - 2C_1 t C_5^2 a + 2C_2 C_5^2 -$$

$$-2C_2 C_5^2 a) / (2C_5^2(-1+a))\}.$$

При $a < -1/4$. Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = -\frac{1}{2}(-2a_1 a^3 - e^{(aa_4)} a_2 a^3 x_3 cos(a_4) + e^{(aa_4)} a_2 a^3 x_2 sin(a_4) + e^{(aa_4)} a_2 a^2 x_3 sin(a_4) +$$

$$+e^{(aa_4)} a_2 a^2 x_2 cos(a_4) - 4e^{(aa_4)} a_2 a x_3 cos(a_4) + 4e^{(aa_4)} a_2 a x_2 sin(a_4) + 4e^{(aa_4)} a_2 x_3 sin(a_4) +$$

$$+4e^{(aa_4)} a_2 x_2 cos(a_4) + a_3 e^{(aa_4)} a^2 x_3 cos(a_4) - a_3 e^{(aa_4)} a^2 x_2 sin(a_4) + 4a_3 e^{(aa_4)} x_3 cos(a_4) -$$

$$-4a_3 e^{(aa_4)} x_2 sin(a_4) + a_3 e^{(aa_4)} a^3 x_3 sin(a_4) + a_3 e^{(aa_4)} a^3 x_2 cos(a_4) + 4a_3 e^{(aa_4)} a x_3 sin(a_4) +$$

$$+4a_3 e^{(aa_4)} a x_2 cos(a_4) - 2x_1 e^{(2aa_4)} a^3) / a^3, x_2 = a_2 + e^{(aa_4)} x_3 sin(a_4) + e^{(aa_4)} x_2 cos(a_4),$$

$$x_3 = a_3 + e^{(aa_4)} x_3 cos(a_4) - e^{(aa_4)} x_2 sin(a_4), x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, \frac{(a^3 x_3 - a^2 x_2 + 4x_3 a - 4x_2)D_{x_1}}{2a^3} + D_{x_2}, -\frac{(a^3 x_2 + a^2 x_3 + 4x_2 a + 4x_3)D_{x_1}}{2a^3} + D_{x_3},$$

$$2ax_1 D_{x_1} + (x_2 a + x_3)D_{x_2} + (-x_2 + x_3 a)D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = x + a_4, y = -(2cos(x + a_4)a_2 + 2cos(x + a_4)e^{(aa_4)} ysin(a_4) - sin(x + a_4)aa_2 -$$

$$-sin(x + a_4)ae^{(aa_4)} ysin(a_4) - 2sin(x + a_4)a_3 - 2sin(x + a_4)e^{(aa_4)} ycos(a_4) -$$

$$-acos(x + a_4)a_3 - acos(x + a_4)e^{(aa_4)} ycos(a_4)) / (2sin(x + a_4) + acos(x + a_4)),$$

$$z = -\frac{1}{4}(-3a^4 a_2^2 - 16a^2 a_2^2 - 2a^5 a_2 a_3 cos(x + a_4)^2 - 8a^3 a_2 a_3 cos(x + a_4)^2 -$$

$$-64sin(x + a_4)a^2 cos(x + a_4)e^{(aa_4)} a_2 ycos(a_4) + 32sin(x + a_4)acos(x + a_4)e^{(aa_4)} a_2 ysin(a_4) +$$

$$+8sin(x + a_4)a^3 cos(x + a_4)a_3 e^{(aa_4)} ycos(a_4) + 32sin(x + a_4)acos(x + a_4)a_3 e^{(aa_4)} ycos(a_4) -$$

$$-16e^{(2aa_4)} y^2 - 4a^3 a_2 a_3 - 16aa_2 a_3 - 4a^5 cos(x + a_4)^2 ze^{(2aa_4)} - 32sin(x + a_4)cos(x + a_4)a_2 a_3 -$$

$$-16sin(x + a_4)a^4 cos(x + a_4)a_1 - 16a_2^2 - 12e^{(aa_4)} a_2 a^3 ycos(a_4) - 24e^{(aa_4)} a_2 a^2 ysin(a_4) -$$

$$-48e^{(aa_4)} a_2 aycos(a_4) + 8a_3 e^{(aa_4)} a^2 ycos(a_4) + 4a_3 e^{(aa_4)} a^3 ysin(a_4) + 16a_3 e^{(aa_4)} aysin(a_4) -$$

$$-16ze^{(2aa_4)} a^3 + 32a_3 e^{(aa_4)} ycos(a_4) - 32sin(x + a_4)cos(x + a_4)e^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) +$$

$$+2a^5 sin(x + a_4)cos(x + a_4)e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 + 8a^3 sin(x + a_4)cos(x + a_4)e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 -$$

$$-8cos(x + a_4)^2 a^3 e^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) - 2cos(x + a_4)^2 a^5 e^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) -$$

$$-3a^4 e^{(2aa_4)} y^2 + 16e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 - 32a^2 sin(x + a_4)cos(x + a_4)e^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) -$$

$$-6a^4 cos(x + a_4)sin(x + a_4)e^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) - 6a^4 e^{(aa_4)} a_2 ysin(a_4) -$$

$$-6a^4 cos(x + a_4)sin(x + a_4)a_2 a_3 - 32cos(x + a_4)^2 a_3 e^{(aa_4)} aysin(a_4) -$$

$$-32sin(x + a_4)cos(x + a_4)a_2 e^{(aa_4)} ycos(a_4) - 32sin(x + a_4)cos(x + a_4)e^{(aa_4)} ysin(a_4)a_3 +$$

$$+2a^4 cos(x + a_4)^2 a_3 e^{(aa_4)} ycos(a_4) + 64cos(x + a_4)^2 e^{(aa_4)} a_2 a^2 ysin(a_4) +$$

$$+32cos(x + a_4)^2 e^{(aa_4)} a_2 aycos(a_4) - 32cos(x + a_4)^2 e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 +$$

$$+16e^{(2aa_4)} y^2 a^2 cos(a_4)^2 + 32a^2 cos(x + a_4)^2 e^{(2aa_4)} y^2 + 32cos(x + a_4)^2 e^{(2aa_4)} y^2 +$$

$$+6a^4 a_2^2 cos(x + a_4)^2 - 8a^3 cos(x + a_4)sin(x + a_4)a_2^2 - 16a_1 a^3 -$$

$$-32a^2 cos(x+a_4)^2 e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 - 6a^4 e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 cos(x+a_4)^2 -$$

$$-4a^3 e^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) - 8a^3 sin(x+a_4)cos(x+a_4)e^{(2aa_4)} y^2 -$$

$$-16ae^{(2aa_4)} y^2 sin(a_4)cos(a_4) - 2a^5 e^{(2aa_4)} y^2 sin(x+a_4)cos(x+a_4) -$$

$$-2a^5 a_2{}^2 sin(x+a_4)cos(x+a_4) - 14sin(x+a_4)a^4 cos(x+a_4)e^{(aa_4)} a_2 ycos(a_4) +$$

$$+2sin(x+a_4)a^4 cos(x+a_4)a_3 e^{(aa_4)} ysin(a_4) - 4a^5 cos(x+a_4)sin(x+a_4)e^{(aa_4)} a_2 ysin(a_4) -$$

$$-8a^3 cos(x+a_4)sin(x+a_4)e^{(aa_4)} a_2 ysin(a_4) + 6a^4 e^{(2aa_4)} y^2 cos(x+a_4)^2 +$$

$$+3a^4 e^{(2aa_4)} y^2 cos(a_4)^2 + 32cos(x+a_4)^2 a_2{}^2 - 16e^{(2aa_4)} y^2 a^2 + 32cos(x+a_4)^2 e^{(aa_4)} a_2 ysin(a_4) -$$

$$-32cos(x+a_4)^2 a_3 e^{(aa_4)} ycos(a_4) - 16sin(x+a_4)a^4 cos(x+a_4)ze^{(2aa_4)} -$$

$$-32a^2 sin(x+a_4)cos(x+a_4)a_2 a_3 - 8cos(x+a_4)^2 a_3 e^{(aa_4)} a^3 ysin(a_4) -$$

$$-4cos(x+a_4)^2 a^5 a_2 e^{(aa_4)} ycos(a_4) + 14cos(x+a_4)^2 a^4 e^{(aa_4)} a_2 ysin(a_4) -$$

$$-8cos(x+a_4)^2 e^{(aa_4)} a_2 a^3 ycos(a_4) + 16cos(x+a_4)^2 ze^{(2aa_4)} a^3 + 32a^2 cos(x+a_4)^2 a_2{}^2 +$$

$$+16cos(x+a_4)^2 a_1 a^3 - 4a^5 cos(x+a_4)^2 a_1) /(a^3(-4cos(x+a_4)^2 + a^2 cos(x+a_4)^2 +$$

$$+4sin(x+a_4)acos(x+a_4) + 4))).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = \frac{1}{4} a_1 a^2 e^{(-2ax_4)} dx_1 dx_4 + \frac{1}{4} a_1 (4sin(x_4)acos(x_4) - 4cos(x_4)^2 - a^2 +$$

$$+a^2 cos(x_4)^2) e^{(-2ax_4)} dx_2 dx_2 - \frac{1}{4} a_1 e^{(-2ax_4)} (-4sin(x_4)cos(x_4) + a^2 cos(x_4)sin(x_4) -$$

$$-4cos(x_4)^2 a + 2a) dx_2 dx_3 + \frac{1}{8} \frac{a_1 e^{(-2ax_4)} (a^2 x_2 + a^3 x_3 + 4x_3 a + 4x_2) dx_2 dx_4}{a} -$$

$$-\frac{1}{4} a_1 e^{(-2ax_4)} (-4sin(x_4)cos(x_4) + a^2 cos(x_4)sin(x_4) - 4cos(x_4)^2 a + 2a) dx_3 dx_2 -$$

$$-\frac{1}{4} a_1 e^{(-2ax_4)} (-4cos(x_4)^2 + a^2 cos(x_4)^2 + 4sin(x_4)acos(x_4) + 4) dx_3 dx_3 -$$

$$-\frac{1}{8} \frac{a_1 e^{(-2ax_4)} (a^3 x_2 - a^2 x_3 + 4x_2 a - 4x_3) dx_3 dx_4}{a} + \frac{1}{4} a_1 a^2 e^{(-2ax_4)} dx_4 dx_1 +$$

$$+\frac{1}{8} \frac{a_1 e^{(-2ax_4)} (a^2 x_2 + a^3 x_3 + 4x_3 a + 4x_2) dx_4 dx_2}{a} - \frac{1}{8} \frac{a_1 e^{(-2ax_4)} (a^3 x_2 - a^2 x_3 + 4x_2 a - 4x_3) dx_4 dx_3}{a}.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$ :

$$g = \frac{1}{8}\frac{a_1 e^{(-2ax)}(a^2+4)ydxdy}{a} + \frac{1}{4}a_1 a^2 e^{(-2ax)}dxdz + \frac{1}{8}\frac{a_1 e^{(-2ax)}(a^2+4)ydydx}{a} -$$

$$-\frac{1}{4}a_1 e^{(-2ax)}(4a\cos(x)\sin(x) + a^2\cos(x)^2 + 4 - 4\cos(x)^2)dydy + \frac{1}{4}a_1 a^2 e^{(-2ax)}dzdx.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$\Big(\frac{4D_x}{a_1 a^2} + \frac{4(-2\cos(x) + a^2\cos(x) + 3a\sin(x))yD_y}{(2\sin(x)+a\cos(x))a_1 a^2} + 2(8\cos(x)y^2 + 6a^2\cos(x)y^2 + 4a^5\cos(x)z +$$

$$+a^4\cos(x)y^2 + 4\sin(x)y^2 a + 8\sin(x)a^4 z + \sin(x)y^2 a^3)D_z \,/\, ((2\sin(x)+a\cos(x))a_1 a^5),$$

$$\frac{4e^{\left(-2a\left(-x+arctg\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\right)\right)}(2\sin(x) - a\cos(x))\cos(x)D_y}{a_1(-4+4\cos(x)^2 + a^2\cos(x)^2)} -$$

$$-\frac{2(2a^2\sin(x)\cos(x) + 8\cos(x)\sin(x) - 5a^3\cos(x)^2 - 20a\cos(x)^2 + 16a)e^{\left(-2a\left(-x+arctg\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\right)\right)}yD_z}{(-4+4\cos(x)^2 + a^2\cos(x)^2)a_1 a^3},$$

$$\frac{4e^{\left(-2a\left(-x+arctg\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\right)\right)}(2\sin(x) - a\cos(x))\sin(x)D_y}{a_1(-4+4\cos(x)^2 + a^2\cos(x)^2)} + 2(a^3\sin(x)\cos(x) + 4a\cos(x)\sin(x) -$$

$$-2a^4\cos(x)^2 - 6a^2\cos(x)^2 + 6a^2 - 8 + 8\cos(x)^2)e^{\left(-2a\left(-x+arctg\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\right)\right)}yD_z \,/\, ((-4+4\cos(x)^2 +$$

$$+a^2\cos(x)^2)a_1 a^3), \frac{4D_z}{a_1 a^2}\Big).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = -2adxD_x dx - \frac{(-2\cos(x) + a^2\cos(x) + 3a\sin(x))dxD_y dy}{(2\sin(x)+a\cos(x))} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(a^2+4)y(-2\cos(x) + a^2\cos(x) + 3a\sin(x))dxD_z dy}{a^3(2\sin(x)+a\cos(x))} - \frac{(-2\cos(x) + a^2\cos(x) + 3a\sin(x))dyD_y dx}{(2\sin(x)+a\cos(x))} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(a^2+4)y(-2\cos(x) + a^2\cos(x) + 3a\sin(x))dyD_z dx}{a^3(2\sin(x)+a\cos(x))} -$$

$$-\frac{1}{2}(10a^3\sin(x)\cos(x) - 8a\cos(x)\sin(x) - 4 + 11a^2 + 2a^4\cos(x)^2 - 16a^2\cos(x)^2)dyD_z dy \,/\, a^3.$$

Тензор кривизны:

$$R = (-a^2 - 1)D_y\, dxdxdy + (a^2 + 1)D_y\, dxdydx + \frac{(a^4 + 5a^2 + 4)yD_z\, dxdxdy}{2a^3} -$$

$$-\frac{(a^4 + 5a^2 + 4)yD_z\, dxdydx}{2a^3} - (-4cos(x)^2 + a^4 cos(x)^2 - 3a^2 cos(x)^2 + 4a^3 sin(x)cos(x) +$$

$$+4acos(x)sin(x) + 4 + 4a^2)D_z\, dydxdy \,/\, a^2 + (-4cos(x)^2 + a^4 cos(x)^2 - 3a^2 cos(x)^2 +$$

$$+4a^3 sin(x)cos(x) + 4acos(x)sin(x) + 4 + 4a^2)D_z dydydx \,/\, a^2.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика не является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = -4(a^2 + 1)aD_y\, dxdxdydx + 4(a^2 + 1)aD_y\, dxdydxdx + \frac{2(a^4 + 5a^2 + 4)yD_z\, dxdxdydx}{a^2} -$$

$$-\frac{2(a^4 + 5a^2 + 4)yD_z\, dxdydxdx}{a^2} - 4(-4cos(x)^2 + a^4 cos(x)^2 - 3a^2 cos(x)^2 + 4a^3 sin(x)cos(x) +$$

$$+4acos(x)sin(x) + 4 + 4a^2)D_z\, dydxdydx \,/\, a + 4(-4cos(x)^2 + a^4 cos(x)^2 - 3a^2 cos(x)^2 +$$

$$+4a^3 sin(x)cos(x) + 4acos(x)sin(x) + 4 + 4a^2)D_z\, dydydxdx \,/\, a.$$

Метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\{-(-4(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))cos(x(t)) + 2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))a^2 cos(x(t)) +$$

$$+6(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))asin(x(t)) - 2(\frac{d^2}{dt^2}y(t))sin(x(t)) - (\frac{d^2}{dt^2}y(t))acos(x(t)))\,/\,(2sin(x(t)) +$$

$$+acos(x(t))) = 0, \frac{1}{2}(-31(\frac{d}{dt}y(t))^2 a^3 cos(x(t)) + 36(\frac{d}{dt}y(t))^2 a^3 cos(x(t))^3 -$$

$$-14(\frac{d}{dt}y(t))^2 a^4 sin(x(t))cos(x(t))^2 + 20(\frac{d}{dt}y(t))^2 acos(x(t)) - 16(\frac{d}{dt}y(t))^2 acos(x(t))^3 +$$

$$+40(\frac{d}{dt}y(t))^2 a^2 cos(x(t))^2 sin(x(t)) + 8(\frac{d}{dt}y(t))^2 sin(x(t)) - 22(\frac{d}{dt}y(t))^2 a^2 sin(x(t)) -$$

$$-2(\frac{d}{dt}y(t))^2 a^5 cos(x(t))^3 + 4(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)a^2 cos(x(t)) +$$

$$+2(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)a^4 cos(x(t)) + 6(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)a^3 sin(x(t)) -$$

$$-16(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)cos(x(t)) + 24(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)asin(x(t)) +$$

$$+4\left(\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right)a^3 sin(x(t)) + 2\left(\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right)a^4 cos(x(t))) \,/\, (a^3(2sin(x(t)) + acos(x(t)))) = 0,$$

$$-2\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 a + \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) = 0\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = -\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}, \quad y(t) = \frac{1}{2}\frac{4C_3C_5 tg\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) - 2C_3C_5 a + C_4}{C_5\left(2tg\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) - a\right)},\right.$$

$$z(t) = -\frac{1}{16}\Big(C_4\iint(320C_3C_5 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)a*$$

$$*cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^2 - 192C_3C_5 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)a +$$

$$+64C_4 acos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^3 + 32a^2 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_4*$$

$$*cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^2 + 10a^4 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_4*$$

$$*cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^2 + 4a^6 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^3 C_3C_5 -$$

$$-256cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^3 C_3C_5a^2 - 2a^5 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^3 C_4 +$$

$$+8a^3 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^3 C_4 + 128C_3C_5 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^3 -$$

$$-128C_3C_5 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) - 32C_4 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)*$$

$$*cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)^2 - C_4a^5 cos\left(\frac{3}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) -$$

$$-8C_4 acos\left(\frac{3}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) - 16C_4 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) +$$

$$+24a^2 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_4 + 7a^4 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_4 -$$

$$-20a^3 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_4 - 3a^5 cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_4 -$$

$$-48a^3 sin\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_3C_5 + 224cos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right)C_3C_5a^2 +$$

$$+7C_4a^4 sin\left(\frac{3}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) - 32C_4 acos\left(\frac{1}{2}\frac{ln(2) + ln(-a(tC_5 + C_6))}{a}\right) +$$

$$+64a^4 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})C_3C_5 + 18C_4 a^3 cos(\frac{3}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a}) -$$

$$-20C_4 a^2 sin(\frac{3}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a}) - 56a^4 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^3 C_3C_5 -$$

$$-2a^3 sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})C_3C_5 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^2 -$$

$$-28a^5 sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})C_3C_5 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^2) /$$

$$/((tC_5+C_6)^2(-32sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a}) + 64sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})*$$

$$*cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^2 - 32sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})*$$

$$*cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^4 + 80acos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a}) -$$

$$-160acos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^3 + 80acos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^5 -$$

$$-80a^2 sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^2 +$$

$$+80a^2 sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^4 +$$

$$+40a^3 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^3 - 40a^3 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^5 -$$

$$-10sin(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})a^4 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^4 +$$

$$+a^5 cos(\frac{1}{2}\frac{ln(2)+ln(-a(tC_5+C_6))}{a})^5))dtdt - 16tC_1a^5 - 16C_2a^5\ )/\ a^5\ \}$$

При $a = -1/4$. Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 - \frac{1}{2}a_2x_3e^{a_4} - \frac{1}{2}a_3e^{a_4}x_3a_4 + \frac{1}{2}a_3e^{a_4}x_2 - \frac{1}{2}a_3x_3e^{a_4} + x_1e^{(2a_4)},$$

$$x_2 = a_2 - e^{a_4}x_3a_4 + e^{a_4}x_2, x_3 = a_3 + x_3e^{a_4}, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, -\frac{x_3D_{x_1}}{2} + D_{x_2}, (\frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2})D_{x_1} + D_{x_3}, 2x_1D_{x_1} + (x_2 - x_3)D_{x_2} + x_3D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = x + a_4, y = \frac{a_2 + xa_3 + a_3 a_4 + ye^{a_4} x - a_3 - ye^{a_4}}{x + a_4 - 1}, z = -\frac{1}{4}(2a_2 ye^{a_4} + 2a_3 ye^{a_4} -$$

$$-2x^2 e^{(2a_4)} y^2 a_4 + 8ze^{(2a_4)} x - 4ze^{(2a_4)} a_4{}^2 + 8ze^{(2a_4)} a_4 - 4ze^{(2a_4)} x^2 - 8ze^{(2a_4)} xa_4 -$$

$$-4a_1 a_4{}^2 - 4a_1 x^2 - 8a_1 xa_4 + 2a_4{}^2 a_2 a_3 + 2x^2 a_2 a_3 - 4a_1 - 4a_3 e^{a_4} yx + 4a_2 ye^{a_4} x^2 +$$

$$+2a_3 e^{a_4} yx^2 - 2a_3 e^{a_4} ya_4 + 8a_1 a_4 + 2a_3 e^{a_4} ya_4 x + 4a_2 ye^{a_4} xa_4 + 8a_1 x + 4xa_4 a_2 a_3 -$$

$$-6a_2 ye^{a_4} x - 4a_2 ye^{a_4} a_4 + 2xa_4 y^2 e^{(2a_4)} - 2xa_4{}^2 e^{(2a_4)} y^2 - 2xa_2 a_3 - 2a_4 a_2 a_3 +$$

$$+a_4{}^2 y^2 e^{(2a_4)} - a_2{}^2 + 2xa_2{}^2 + 2a_4 a_2{}^2 - 4ze^{(2a_4)}) / (x + a_4 - 1)^2).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a_1 e^{(-2x_4)} dx_1 dx_4 - a_1 e^{(-2x_4)} dx_2 dx_2 - a_1 e^{(-2x_4)} (x_4 - 1) dx_2 dx_3 - \frac{1}{2} a_1 e^{(-2x_4)} x_3 dx_2 dx_4 -$$

$$-a_1 e^{(-2x_4)} (x_4 - 1) dx_3 dx_2 - a_1 e^{(-2x_4)} (x_4 - 1)^2 dx_3 dx_3 + \frac{1}{2} a_1 e^{(-2x_4)} (x_2 + x_3) dx_3 dx_4 +$$

$$+a_1 e^{(-2x_4)} dx_4 dx_1 - \frac{1}{2} a_1 e^{(-2x_4)} x_3 dx_4 dx_2 + \frac{1}{2} a_1 e^{(-2x_4)} (x_2 + x_3) dx_4 dx_3.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = \frac{1}{2} a_1 e^{(-2x)} ydxdy + a_1 e^{(-2x)} dxdz + \frac{1}{2} a_1 e^{(-2x)} ydydx - a_1 e^{(-2x)} (x-1)^2 dydy + a_1 e^{(-2x)} dzdx.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(\frac{D_x}{a_1} + \frac{y(x-2)D_y}{a_1(x-1)} + \frac{(xy^2 + 4zx - 4z)D_z}{2a_1(x-1)}, -\frac{D_y}{a_1(x-1)} + \frac{y(2x-1)D_z}{2a_1(x-1)},$$

$$-\frac{xD_y}{a_1(x-1)} + \frac{y(3x-2)D_z}{2a_1(x-1)}, \frac{D_z}{a_1}).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = -2dxD_x dx - \frac{(x-2)dxD_y dy}{x-1} + \frac{y(x-2)dxD_z dy}{2(x-1)} - \frac{(x-2)dyD_y dx}{x-1} + \frac{y(x-2)dyD_z dx}{2(x-1)} +$$

$$+(-x^2 - \frac{3}{2} + 3x)dyD_z dy.$$

Тензор кривизны:

$$R = -D_y dxdxdy + D_y dxdydx + \frac{yD_z dxdxdy}{2} - \frac{yD_z dxdydx}{2} +$$

$$+(-x^2 + 2x - 1)D_z dydxdy + (x^2 + 1 - 2x)D_z dydydx.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика не является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = -4D_y\,dxdxdydx + 4D_y\,dxdydxdx + 2yD_z\,dxdxdydx - 2yD_z\,dxdydxdx +$$

$$+(-4x^2 + 8x - 4)D_z\,dydxdydx + (4x^2 - 8x + 4)D_z\,dydydxdx.$$

Метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\{ \frac{-2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))x(t) + 4(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}y(t))x(t) - (\frac{d^2}{dt^2}y(t))}{x(t)-1} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}(2(\frac{d}{dt}y(t))^2 x(t)^3 - 8(\frac{d}{dt}y(t))^2 x(t)^2 + 9(\frac{d}{dt}y(t))^2 x(t) - 3(\frac{d}{dt}y(t))^2 -$$

$$-2(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)x(t) + 4(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t) - 2(\frac{d^2}{dt^2}z(t))x(t) +$$

$$+2(\frac{d^2}{dt^2}z(t)))\ /\ (x(t)-1) = 0, -2(\frac{d}{dt}x(t))^2 + (\frac{d^2}{dt^2}x(t)) = 0\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = -\frac{1}{2}ln(2) - \frac{1}{2}ln(-C_5 t - C_6),\ y(t) = \frac{C_3 C_5 ln(2) + C_3 C_5 ln(-C_5 t - C_6) + 2C_3 C_5 + 2C_4}{C_5(ln(2) + ln(-C_5 t - C_6) + 2)},$$

$$z(t) = (C_4{}^2 - C_4 C_3 C_5 ln(2) - C_4 C_3 C_5 ln(-C_5 t - C_6) - 2C_4 C_3 C_5 +$$

$$+C_4{}^2 ln(2) + C_4{}^2 ln(-C_5 t - C_6) + tC_1 C_5{}^2 ln(2)^2 + 2tC_1 C_5{}^2 ln(2) ln(-C_5 t - C_6) +$$

$$+4tC_1 C_5{}^2 ln(2) + tC_1 C_5{}^2 ln(-C_5 t - C_6)^2 + 4tC_1 C_5{}^2 ln(-C_5 t - C_6) + 4tC_1 C_5{}^2 +$$

$$+C_2 C_5{}^2 ln(2)^2 + 2C_2 C_5{}^2 ln(2) ln(-C_5 t - C_6) + 4C_2 C_5{}^2 ln(2) + C_2 C_5{}^2 ln(-C_5 t -$$

$$-C_6)^2 + 4C_2 C_5{}^2 ln(-C_5 t - C_6) + 4C_2 C_5{}^2)\ /(C_5{}^2(ln(2) + ln(-C_5 t - C_6) + 2)^2)\}.$$

1.8.4. Когомологии:

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 + 2a_2 x_3 e^{(-a_4)} + 2a_2 a_4 x_3 e^{(-a_4)} + 2a_2 a_3 x_4 + 2a_2 x_4 x_3 e^{(-a_4)} + 2x_2 e^{a_4} a_3 a_4 +$$

$$+2x_2 e^{a_4} a_3 x_4 + 2x_2 a_4 x_3 + x_1, x_2 = a_2 + x_2 e^{a_4}, x_3 = a_3 + x_3 e^{(-a_4)}, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, (2x_3 + 2x_3x_4)D_{x_1} + D_{x_2}, 2x_2x_4D_{x_1} + D_{x_3}, 2x_3x_2D_{x_1} + x_2D_{x_2} - x_3D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = x + a_4, y = -a_2 + ye^{a_4} + a_3e^{(2x+2a_4)}, z = -a_2^2 + 2a_2ye^{a_4} - 2a_3e^{(2x+2a_4)}a_2a_4 +$$

$$+e^{(2x+2a_4)}a_1 + e^{(2a_4)}z).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a_1dx_1dx_4 - a_1e^{(-2x_4)}dx_2dx_2 + a_1dx_2dx_3 - 2a_1x_3x_4dx_2dx_4 + a_1dx_3dx_2 -$$

$$-a_1e^{(2x_4)}dx_3dx_3 - 2a_1x_2(1 + x_4)dx_3dx_4 + a_1dx_4dx_1 - 2a_1x_3x_4dx_4dx_2 -$$

$$-2a_1x_2(1 + x_4)dx_4dx_3 - 4a_1x_3x_2dx_4dx_4.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = -4a_1(z + y^2)e^{(-2x)}dxdx + 2a_1ye^{(-2x)}dxdy + a_1e^{(-2x)}dxdz + 2a_1ye^{(-2x)}dydx -$$

$$-a_1e^{(-2x)}dydy + a_1e^{(-2x)}dzdx.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$\left(\frac{D_x}{a_1} + \frac{yD_y}{a_1} + \frac{2zD_z}{a_1}, -\frac{e^{(2x)}D_y}{a_1}, -\frac{D_y}{a_1} + \frac{2yD_z}{a_1}, \frac{e^{(2x)}D_z}{a_1}\right).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = -dxD_ydy + (4z + 4y^2)dxD_zdx - 2ydxD_zdy - 2dxD_zdz - dyD_ydx - 2ydyD_zdx +$$

$$+dyD_zdy - 2dzD_zdx.$$

Тензор кривизны:

$$R = D_ydxdxdy - D_ydxdydx - 2yD_zdxdxdy + 2yD_zdxdydx + D_zdydxdy - D_zdydydx.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской. Тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\{-2\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) = 0, -4\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\left(\frac{d}{dt}z(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2 -$$

$$-4\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)y(t) + 4\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2z(t) + 4\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2y(t)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right) = 0, \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0\}.$$

Решая эту систему 2 ОДУ второго порядка, получим геодезические:

$$\{x(t) = C_3 t + C_4, y(t) = \frac{(2C_1 C_3 + e^{(2C_3 t+2C_4)} C_2)}{2C_3},\ \frac{d^2}{dt^2} z(t) = 4C_3 ((\frac{d}{dt} z(t)) - C_3 z(t) - C_1{}^2 C_3\}.$$

1.8.5. Когомологии:

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = -x_2{}^2\cos(a_4)\sin(a_4) + x_3{}^2\cos(a_4)\sin(a_4) + 2x_2 x_3\cos(a_4)^2 - 2a_2 x_2\sin(a_4) +$$

$$+2a_2 x_3\cos(a_4) + a_1 + x_1 + a_2{}^2 x_4 + a_3{}^2 x_4 + x_2{}^2 a_4 + x_3{}^2 a_4 - 2x_3 x_2 + 2a_2 a_4 x_2\cos(a_4) +$$

$$+2a_2 a_4 x_3\sin(a_4) + 2a_2 x_4 x_2\cos(a_4) + 2a_2 x_4 x_3\sin(a_4) - 2a_3 a_4 x_2\sin(a_4) + 2a_3 a_4 x_3\cos(a_4) -$$

$$-2a_3 x_4 x_2\sin(a_4) + 2a_3 x_4 x_3\cos(a_4), x_2 = a_2 + x_2\cos(a_4) + x_3\sin(a_4),$$

$$x_3 = a_3 - x_2\sin(a_4) + x_3\cos(a_4), x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, (2x_2 x_4 + 2x_3)D_{x_1} + D_{x_2}, 2x_3 x_4 D_{x_1} + D_{x_3}, 2x_3{}^2 D_{x_1} + x_3 D_{x_2} - x_2 D_{x_3} + D_{x_4}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = x + a_4, y = (2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_2 + 2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)y\sin(a_4) + 2\cos(x + a_4)^2 a_3 +$$

$$+2\cos(x + a_4)^2 y\cos(a_4) - a_2 - y\sin(a_4) - a_3 - y\cos(a_4)) / (-1 + 2\cos(x + a_4)^2),$$

$$z = (z + a_1 + 2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_1 + 2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)z +$$

$$+4\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_3 a_4 y\cos(a_4) + 4\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_3 x y\cos(a_4) +$$

$$+2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_3{}^2 x + y^2\cos(a_4)\sin(a_4) + 2a_2 y\cos(a_4) + 2y^2\cos(x + a_4)^2\cos(a_4)^2 -$$

$$-4\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_2 a_4 y\sin(a_4) - 4\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)a_2 x y\sin(a_4) +$$

$$+4xy^2\cos(a_4)^2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4) + 4y^2 a_4\cos(a_4)^2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4) -$$

$$-4xy^2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4) - 2a_2{}^2 x\cos(x + a_4)\sin(x + a_4) - 2y^2 a_4\cos(x + a_4)\sin(x + a_4) -$$

$$-4a_4 a_2{}^2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4) - 2y^2\cos(x + a_4)^2 - y^2\cos(a_4)^2 + 2a_2 x a_3 + 2a_2 a_4 a_3 + a_2{}^2 +$$

$$+2a_2 x y\cos(a_4) + 2xy\sin(a_4)a_3 + 2xy^2\sin(a_4)\cos(a_4) + 2a_4 y\sin(a_4)a_3 +$$

$$+2a_4 y^2\sin(a_4)\cos(a_4) + 2a_2 a_4 y\cos(a_4) - 4\cos(x + a_4)^2 a_2 y\sin(a_4) - 4\cos(x + a_4)^2 a_2 x a_3 -$$

$$-4\cos(x + a_4)^2 a_2 a_4 a_3 + a_2{}^2 x + a_3{}^2 x + y^2 a_4 + 2a_2 y\sin(a_4) + 2a_2 a_4 y\sin(a_4) + 2a_2 x y\sin(a_4) +$$

$$+2a_3 a_4 y\cos(a_4) + 2a_3 x y\cos(a_4) - 2\cos(x + a_4)^2 a_2{}^2 + 2\cos(x + a_4)\sin(x + a_4)y^2\cos(a_4)\sin(a_4) +$$

$$+4\cos(x+a_4)\sin(x+a_4)a_2 y\cos(a_4) - 4\cos(x+a_4)^2 a_2 xy\cos(a_4) - 4\cos(x+a_4)^2 xy\sin(a_4)a_3 -$$

$$-4\cos(x+a_4)^2 xy^2\sin(a_4)\cos(a_4) - 4\cos(x+a_4)^2 a_2 a_4 y\cos(a_4) - 4\cos(x+a_4)^2 a_4 y\sin(a_4)a_3 -$$

$$-4\cos(x+a_4)^2 a_4 y^2\sin(a_4)\cos(a_4) + y^2) \,/\, (2\cos(x+a_4)\sin(x+a_4)+1)).$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega = a_1 dx_1 dx_4 + a_1(2\cos(x_4)\sin(x_4)-1)dx_2 dx_2 + a_1(-1+2\cos(x_4)^2)dx_2 dx_3 -$$

$$-2a_1 x_2 x_4 dx_2 dx_4 + a_1(-1+2\cos(x_4)^2)dx_3 dx_2 - a_1(2\cos(x_4)\sin(x_4)+1)dx_3 dx_3 -$$

$$-2a_1(x_3 x_4 + x_2)dx_3 dx_4 + a_1 dx_4 dx_1 - 2a_1 x_2 x_4 dx_4 dx_2 - 2a_1(x_3 x_4 + x_2)dx_4 dx_3 -$$

$$-2a_1(x_2^2 + x_3^2)dx_4 dx_4.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = -2a_1 y^2 dxdx - 2a_1 xydxdy + a_1 dxdz - 2a_1 xydydx - a_1(2\cos(x)\sin(x)+1)dydy + a_1 dzdx.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$\left(\frac{D_x}{a_1} - \frac{y\cos(2x)D_y}{a_1(2\cos(x)\sin(x)+1)} + \frac{2y^2(2x\cos(x)\sin(x)+2\cos(x)^2-1-x)D_z}{a_1(-1+2\cos(x)^2)},\right.$$

$$-\frac{(\sin(2x)+1)^{(\frac{1}{2})}\sin(x)D_y}{a_1(2\cos(x)\sin(x)+1)} - \frac{(\cos(x)+\sin(x)+2\sin(x)x)yD_z}{a_1(\sin(2x)+1)^{(\frac{1}{2})}},$$

$$\left.-\frac{(\sin(2x)+1)^{(\frac{1}{2})}\cos(x)D_y}{a_1(2\cos(x)\sin(x)+1)} - \frac{(-\cos(x)+2x\cos(x)-\sin(x))yD_z}{a_1(\sin(2x)+1)^{(\frac{1}{2})}}, \frac{D_z}{a_1}\right).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = \frac{(\cos(x)-\sin(x))dxD_y dy}{\cos(x)+\sin(x)} - \frac{2y(2x\cos(x)\sin(x)+2\cos(x)^2-1-x)dxD_z dy}{-1+2\cos(x)^2} +$$

$$+\frac{(\cos(x)-\sin(x))dyD_y dx}{\cos(x)+\sin(x)} - \frac{2y(2x\cos(x)\sin(x)+2\cos(x)^2-1-x)dyD_z dx}{-1+2\cos(x)^2} -$$

$$-(2x-2\cos(x)^2+1)dyD_z dy.$$

Тензор кривизны:

$$R = -D_y dxdxdy + D_y dxdydx - 2xyD_z dxdxdy + 2xyD_z dxdydx -$$

$$-(2\cos(x)\sin(x)+1)D_z dydxdy + (2\cos(x)\sin(x)+1)D_z dydydx.$$

Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской. Тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\{(2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\cos(x(t)) - 2(\frac{d}{dt}x(t))(\frac{d}{dt}y(t))\sin(x(t)) + (\frac{d^2}{dt^2}y(t))\cos(x(t)) +$$

$$+(\frac{d^2}{dt^2}y(t))\sin(x(t))) / (\cos(x(t)) + \sin(x(t))),(2(\frac{d}{dt}y(t))^2 x(t) - 4(\frac{d}{dt}y(t))^2 x(t)\cos(x(t))^2 -$$

$$-4(\frac{d}{dt}y(t))^2 \cos(x(t))^2 + 4(\frac{d}{dt}y(t))^2 \cos(x(t))^4 + (\frac{d}{dt}y(t))^2 -$$

$$-8(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)x(t)\cos(x(t))\sin(x(t)) - 8(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)\cos(x(t))^2 +$$

$$+4(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t) + 4(\frac{d}{dt}y(t))(\frac{d}{dt}x(t))y(t)x(t) -$$

$$-(\frac{d^2}{dt^2}z(t)) + 2(\frac{d^2}{dt^2}z(t))\cos(x(t))^2) /(-1 + 2\cos(x(t))^2),\frac{d^2}{dt^2}x(t)\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_5 t + C_6, \mathrm{y}(t) = \frac{C_3 C_5 \operatorname{tg}(C_5 t + C_6) - C_4 + C_3 C_5}{C_5(\operatorname{tg}(C_5 t + C_6) + 1)},$$

$$z(t) = C_4 \iint (C_4 - 16\sin(2C_5 t + 2C_6)C_6 C_3 C_5 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) -$$

$$-16C_5^2 \sin(2C_5 t + 2C_6)tC_3 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) +$$

$$+8C_5 \sin(2C_5 t + 2C_6)tC_4 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) + C_4 \cos(4C_5 t + 4C_6) -$$

$$-8\cos(2C_5 t + 2C_6)C_3 C_5 + 8C_5^2 tC_3 + 8C_6 C_3 C_5 + 8\cos(2C_5 t + 2C_6)C_4 \cos(C_5 t + C_6)^2 -$$

$$-8C_6 C_4 \cos(C_5 t + C_6)^2 - 4C_4 \cos(2C_5 t + 2C_6)C_5 t - 4C_4 \cos(2C_5 t + 2C_6)C_6 -$$

$$-8C_5^2 \sin(2C_5 t + 2C_6)tC_3 - 8\sin(2C_5 t + 2C_6)C_6 C_3 C_5 +$$

$$+8C_5 \sin(2C_5 t + 2C_6)tC_4 \cos(C_5 t + C_6)^2 + 8\cos(2C_5 t + 2C_6)C_4 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) -$$

$$-8C_6 C_4 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) + 8\sin(2C_5 t + 2C_6)C_6 C_4 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) -$$

$$-16\cos(2C_5 t + 2C_6)C_3 C_5 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) +$$

$$+16C_5^2 tC_3 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) - 8C_5 tC_4 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) +$$

$$+16C_6 C_3 C_5 \sin(C_5 t + C_6)\cos(C_5 t + C_6) + 8\sin(2C_5 t + 2C_6)C_6 C_4 \cos(C_5 t + C_6)^2 -$$

$$-8C_5 t C_4 \cos(C_5 t + C_6)^2) /(\cos(2C_5 t + 2C_6)(-1 - 4\cos(C_5 t + C_6)^2 + 4\cos(C_5 t + C_6)^4 -$$

$$-4\cos(C_5 t + C_6)\sin(C_5 t + C_6)))dt dt / 2 + C_1 t + C_2\}.$$

2.21.1. Когомологии:

$$C = \{\{\},\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Умножение в группе $\overline{G}$:

$$(x_1 = a_1 + a_2 x_4 e^{(-a5)} + a_3 x_4 e^{(-a5)} a_4 + a_3 x_4^2 e^{(-2a5)} - a_3 x_4 e^{(-a5)} a_4 a5 + \frac{x_3 e^{a5} a_4^2}{2} +$$

$$+x_3 x_4 a_4 + x_1 e^{(-a5)}, x_2 = a_2 + a_3 a5 x_4 e^{(-a5)} + a_3 a_4 x_5 + a_3 x_5 x_4 e^{(-a5)} + a_3 x_4 e^{(-a5)} +$$

$$+x_3 e^{a5} a_4 a5 + x_3 e^{a5} a_4 x_5 + x_3 a5 x_4 + x_2, x_3 = a_3 + x_3 e^{a5}, x_4 = a_4 + x_4 e^{(-a5)}, x_5 = x_5 + a5).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$(D_{x_1}, x_4 D_{x_1} + D_{x_2}, x_4^2 D_{x_1} + (x_4 x_5 + x_4) D_{x_2} + D_{x_3}, x_3 x_4 D_{x_1} + x_3 x_5 D_{x_2} + D_{x_4},$$

$$x_1 D_{x_1} + x_3 x_4 D_{x_2} + x_3 D_{x_3} - x_4 D_{x_4} + D_{x_5}).$$

Действие группы $\overline{G}$ на многообразии $M$:

$$(x = a_3 + x e^{a_5}, y = a_2 + y - a_5 a_4 a_3 - a_3 a_4 - x e^{a_5} a_4,$$

$$z = a_1 + \frac{1}{2} x e^{a_5} a_4^2 + z e^{(-a_5)} - a_4 a_2 - a_4 y + a_5 a_4^2 a_3)$$

Левоинвариантная форма Мауэра−Картана:

$$\Omega := a_1 dx_1 dx_3 - a_1 dx_2 dx_2 + a_1 x_4 x_5 dx_2 dx_3 + a_1 (x_5 + 1) x_3 dx_2 dx_4 + a_1 x_4 x_3 dx_2 dx_5 +$$

$$+a_1 dx_3 dx_1 + a_1 x_4 x_5 dx_3 dx_2 - a_1 x_4^2 (x_5^2 + 1) dx_3 dx_3 - a_1 (x_3 x_5^2 x_4 + x_4 x_3 + x_2) dx_3 dx_4 -$$

$$-a_1 x_4^2 x_5 x_3 dx_3 dx_5 + a_1 (x_5 + 1) x_3 dx_4 dx_2 - a_1 (x_3 x_5^2 x_4 + x_4 x_3 + x_2) dx_4 dx_3$$

$$-a_1 (x_5 + 1)^2 x_3^2 dx_4 dx_4 - a_1 (x_5 + 1) x_3^2 x_4 dx_4 dx_5 + a_1 x_4 x_3 dx_5 dx_2$$

$$-a_1 x_4^2 x_5 x_3 dx_5 dx_3 - a_1 (x_5 + 1) x_3^2 x_4 dx_5 dx_4 - a_1 x_4^2 x_3^2 dx_5 dx_5.$$

Инвариантная невырожденная метрика на $M$:

$$g = a_1 dx dz - a_1 dy dy + a_1 dz dx.$$

Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики $g$:

$$(\frac{y D_x}{a_1} + \frac{z D_y}{a_1}, \frac{D_x}{a_1}, \frac{x D_x}{a_1} - \frac{z D_z}{a_1}, -\frac{x D_y}{a_1} - \frac{y D_z}{a_1}, -\frac{D_y}{a_1}, \frac{D_z}{a_1}).$$

Символы Кристоффеля для $g$:

$$C = 0.$$

Тензор кривизны нулевой. Вычислим первую ковариантную производную кривизны, чтобы убедиться, что метрика является метрикой постоянной кривизны:

$$R_1 = 0.$$

Метрика является конформно плоской. Тензор кручения нулевой. Уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_5 t + C_6, y(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\}.$$

Полученные результаты могут быть использованы для решения различных геометрических задач. Существуют также разные способы отождествления геодезических псевдоримановых многообразий с траекториями консервативных и неконсервативных динамических систем, которые открывают широкие возможности для приложения результатов исследования в физике и механике.

**Литература**

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. − М., 1989. – 472 с.
2. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. − М.: Физ. − мат. лит., 1995. − 344 с.
3. Gordon Carolyn S. Isometry groups of Riemannian solvmanifolds / Carolyn S. Gordon, Edward N. Wilson // Trans. Ampr. Math. Soc. – 1988. – 307, № 1. – P. 245–269.
4. Kobayashi S. Foundations of Differential Geometry/ S. Kobayashi, K. Nomizu // New−York−London, v. I, 1963; v. II, 1969.
5. G. D. Mostow. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. / G. D. Mostow. − Ann. Math., V. 52, no. 3, pp. 606−636 (1950).
6. Komrakov B. Three−dimensional isotropically−faithful homogeneous spaces/ B. Komrakov, A. Tchourioumov, N. Mozhey et al. − V. I−III, Preprints Univ. Oslo, no. 35−37, (1993).
7. Schmidt B. G. Homogeneous Riemannian spaces and Lie algebras of Killing fields / B.G. Schmidt// Gen. Relat. and Gravit. 1971. – 2, № 2. – P. 105–120.