УДК 372.851

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MAPLE

Можей Н.П.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР), Минск, Беларусь, mozheynatalya@mail.ru

У систем аналитических вычислений широкая область применения в разных отраслях науки, поскольку они имеют большой выбор инструментов, позволяющий решать научные задачи, обладают универсальными возможностями, причем постоянно совершенствуются, развивая, в частности, математический аппарат; уже нет необходимости программировать компьютер для решения типовых математических задач. Геометрия, в том числе и дифференциальная, использует современные компьютерные технологии для исследования своих проблем, например, пакеты прикладных программ применяются в классификационных задачах. Так М. Хлавова в [1] классифицировала двупараметрические движения плоскости Лобачевского; Л. Н. Чибрикова искала левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с применением систем аналитических расчетов; Е.Д. Родионовым и В.В. Славским [2] получены результаты по классификации локально конформно однородных многообразий; Т. Ариас-Марсо и О. Ковальский [3] изучали проблему классификации 4-мерных однородных пространств Д'Атри. Системы компьютерной математики используются для исследования однородных пространств, определения инвариантных свойств петель [4], для изучения свойств флаговых многообразий [5] и др.

Данная работа посвящена применению математических пакетов для нахождения трехмерных однородных пространств, а также алгебр Ли векторных полей, когомологий, действий групп Ли, аффинных связностей, тензоров кривизны, кручения и геодезических на этих многообразиях. Тема имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях (см., например, [6]). Исследование, например, геодезических сопряжено с необходимостью исследования и решения систем дифференциальных уравнений, что ограничивает возможности применения аналитических методов и вынуждает прибегать к компьютерным методам исследования. Наиболее эффективное решение задачи нахождения геодезических возможно в системах компьютерной математики, в частности, в системе Maple. Одна из самых мощных и популярных систем компьютерной математики Maple в диалоговом режиме решает огромное число математических задач, имеет огромные вычислительные возможности, мощные графические средства и встроенный язык программирования. Она позволяет проводить не только вычисления, но и символьные преобразования математических выражений, автоматизирует выполнение расчетов различной степени сложности, позволяет повести визуализацию решения задачи. Maple незаменим как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически, так и для поиска методов решения.

Сначала получена локальная классификация трехмерных однородных пространств как пар алгебр Ли. Далее для каждой такой пары вычисляем геодезические (используем пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor). Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G \subset \bar{G}$, т.к. многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G} / G$ (см., например, [7]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M.

Широкий класс среди однородных пространств образуют однородные пространства с разрешимой группой преобразований. Их исследование существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых алгебр Ли, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$:

$$s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g} \text{ для всех } s\in G, x\in\bar{\mathfrak{g}}.$$

При этом $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ как

$$x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g} \text{ для всех } x\in\mathfrak{g}, y\in\bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно–точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$ произвольной точки $x\in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$–модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно–точных пар коразмерности три нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$–модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найти (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$ –модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}=3$ найдены в [8], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные однородные пространства – просто трехмерные группы Ли. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$–инвариантным. Хорошо известно, что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, $\bar{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$T(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = \Lambda(x)y_\mathfrak{m} - \Lambda(y)x_\mathfrak{m} - [x, y]_\mathfrak{m}$$

для всех $x, y\in\bar{G}$; тензор кривизны $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$R(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y\in\bar{G}$.

Для понимания сложного математического объекта желательно разложить его на более простые "неразложимые" компоненты и проанализировать это разложение. В дифференциальной геометрии фундаментальным результатом в этом направлении является теорема де Рама о разложении риманова многообразия в декартово произведение многообразий, неразложимых при действии локальных групп голономии. Впоследствии было получено несколько существенных обобщений теоремы де Рама. Разложение и классификация римановых голономий применимы в физике, в особенности, в теории струн. Аффинные группы голономии – группы, возникающие как голономии аффинных связностей без кручения; те, которые не являются римановыми (псевдоримановыми) известны и как неметрические группы голономии. Теорема де Рама не относится аффинным группам голономии, таким образом, полная классификация не получена.

За определение алгебры когомологий многообразия принимается ее конструкция согласно теореме де Рама. Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M. В работе [9] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств. Для когомологии разрешимых алгебр Ли известны, лишь немногие сколько-нибудь общие утверждения.

Однородные римановы пространства с неприводимой группой изотропии изучались с топологической точки зрения. В частности, ряд работ посвящен вычислению кольца когомологии этих пространств, основанном на применении теоремы Картана и спектральных последовательностях. Вычисления для неприводимых компактных симметрических пространств проведены еще Борелем в 50-х годах. Ряд утверждений теории Ходжа дает информацию о строении кольца когомологий риманова пространства, обладающего нетривиальными параллельными дифференциальными формами и, тем самым, имеющего нестандартную группу голономии. Примерами таких пространств являются кэлеровы многообразия и симметрические пространства.

Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α, через C_1 – множество $(p-1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, C_2 – множество p–форм, C_3 – множество $(p+1)$–форм и т.д, пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$, пустое множество будем записывать $\{\}$. Пусть $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пространство внешних p–форм, p–форма α из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ замкнута, если $d(\alpha) = 0$, и точная, если $\alpha = d(\beta)$ для некоторой $(p-1)$–формы β из $A^{(p-1)}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Алгебра Ли когомологий $H^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ степени p – векторное пространство замкнутых p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ по модулю точных p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Обозначим H_1 – множество p–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 – множество $(p+1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т.д., т.е. $H = \{H_1, H_2, H_3, ...\}$ – множество всех замкнутых форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Начнем с построения всех трехмерных однородных пространств. Все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [3]. Используем пакет DifferentialGeometry, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого задаем структурные константы для этой алгебры Ли и используем команду DGsetup, чтобы инициализировать алгебру. После инициализации можно делать все виды вычислений и проверок. Для подалгебры изотропии $\mathfrak{g}$ однородного пространства, которое мы построили, указываем базис подалгебры**.** Выбирав подалгебру $\mathfrak{g}$, находим (если это возможно) редуктивное дополнение к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого используем команду ComplementaryBasis, чтобы построить максимально общее дополнение, применим команду Query, чтобы определить те значения параметров, для которых дополнение редуктивно. Далее займемся построением однородного пространства. Находим (глобальную) группу Ли $\bar{G}$, такую, что ее алгебра Ли совпадает с $\bar{\mathfrak{g}}$. Сначала определяем локальные координаты группы. Команда LieGroup пакета GroupActions использует 2-е и 3-ю теоремы Ли и непосредственно строит глобальную группу Ли, алгебра Ли которой задана. Результатом выполнения этой команды является модуль, предоставляющий информацию о группе Ли. Явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах получаем с помощью команды LeftMultiplication. Находим лево- и правоинвариантные векторные поля на $\bar{G}$. Они вычисляются командой InvariantVectorsAndForms. Команда LieAlgebraData вычисляет структурные константы для правоинвариантных векторных полей. Эти структурные константы совпадают со структурными константами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Фактор $\bar{G}$ по подгруппе G, порожденной векторными полями, является трехмерным многообразием. Строим однородное пространство $\bar{G}/G$. Для этого нужно вычислить в координатах формулу для проекции π группы $\bar{G}$ на $M=\bar{G}/G$. Эта проекция сопоставляет элементу g группы $\bar{G}$ смежный класс gG, то есть $\pi(g)=gG$. Следовательно, для любого h из G имеем $\pi(gh)=ghG=gG=\pi(g)$, поэтому проекция π инвариантна относительно правого действия G на $\bar{G}$. Локально это правое действие дает левоинвариантное векторное поле. Таким образом, если

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4)=[F_1(x_1, x_2, x_3, x_4), F_2(x_1, x_2, x_3, x_4), F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

то составляющие функции F_1, F_2, F_3 – инварианты векторного поля. Это является теоретическим обоснованием для вычисления проекции π. Находим действие группы Ли $\bar{G}$ на многообразии $M=\bar{G}/G$. Для этого нужно найти сечение проекции π, то есть, отображение $\sigma: M\to\bar{G}$, такое, что $\pi\circ\sigma$ тождественно на M. Тогда действие $\bar{G}$ на M получается как композиция проекции π, левого умножения dotLeft группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения σ. Локальное действие $\bar{G}$ на M вычисляется с использованием команды InfinitesimalTransformation. Результат можно проверить, т. к. структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с алгеброй Ли, с которой мы стартовали. Единица группы $\bar{G}$ проектируется в точку на многообразии M и позволяет найти стабилизатор (подгруппу G), используя команду IsotropySubalgebra.

Рассмотрим, например, пару 1.1.1 (см. [8]). Алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ четырехмерна. Ее таблица умножения при λ=0 имеет вид

$$[e_1, e_2] =-e_1$$

(остальные структурные константы нулевые), при этом подалгебра $h = [e_1]$.

Сначала вычислим когомологии трехмерного однородного многообразия. Используем пакеты LieAlgebras, Tensor, LieAlgebraCohomology, зададим LieAlgebraData алгебру Ли с указанной таблицей умножения. Находим когомологии

C := RelativeChains(h); H := Cohomology(C).

Получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3,\ \theta_4\},\{-\theta_3\wedge\theta_4\},\{\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_4,\ \theta_3\},\{-\theta_3\wedge\theta_4\},\{\}\}$$

Аналогично, при λ=-1 получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\},\{-\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3\}\}$$

Определим по алгебре локальные координаты группы Ли $\bar{G}$, транзитивно действующей на однородном пространстве. Сначала определим группу при помощи команд DGsetup и LieGroup. Умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1 = a_1 + x_1 e^{(-a_3)}, x_2 = a_2 + x_2 e^{a_3}, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли (функция LieAlgebraData):

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + D_{x_3}, D_{x_4}).$$

Обозначим координаты (x, y, z) на M и вычислим действие группы $\bar{G}$ на многообразии M:

$$(x = a_1 + xe^{(-a_3)}, y = a_2 + ye^{a_3}, z = z + a_4).$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M:

[D_x ; D_y; -xD_x + y D_y; D_z].

Убеждаемся, что структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с исходными. Подалгебра, являющаяся алгеброй Ли стабилизатора (IsotropySubalgebra), имеет вид

[-xD_x + y D_y].

Тензор Ω на группе Ли выпишем в виде левоинвариантной формы Мауэра−Картана (с точностью до константы):

$$\Omega = dx_1 dx_2 + dx_2 dx_1 + \beta dx_4 dx_4.$$

Этот тензор является инвариантным относительно подалгебры изотропии. Сведем этот инвариантный тензор (PushPullTensor) на группе Ли $\overline{G}$ к инвариантной невырожденной метрике на M :

$$g = dxdy + dydx + \beta dzdz.$$

Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга (KillingVectors) для метрики. Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики g :

$$(-zD_x + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{D_z}{\beta}, -zD_y + \frac{xD_z}{\beta}, xD_x - yD_y, D_x, D_y).$$

Символы Кристоффеля (Christoffel) для g :

$$C = 0.$$

Тензор кривизны (CurvatureTensor) нулевой. Вычислив первую ковариантную производную кривизны (CovariantDerivative):

$$R_1 = 0,$$

убедились, метрика постоянной кривизны, метрика является конформно плоской (CottonTensor), тензор кручения (TorsionTensor) нулевой, т.е. связность без кручения.

Если $\{x(t); y(t); z(t)\}$ − кривая на M , тогда уравнения геодезических относительно связности –− это система ОДУ второго порядка. Найдем вектор (GeodesicEquations), компоненты которого − уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка (dsolve), получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = C_5 t + C_6, y(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\right\}.$$

Аналогично, при λ=0 умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1=a_1+x_1e^{-a2}, x_2=x_2+a_2, x_3=x_3+a_3, x_4=x_4+a_4)$$

Используя ComplementaryBasis, находим дополнительный базис и определяем, является ли пара редуктивной.

Алгебры Ли право и левоинвариантных векторных полей:

$$[D_{x1}, -x_1D_{x1}+D_{x2}, D_{x3}, D_{x4}], [e^{-x2}D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}, D_{x4}].$$

Применяя LieDerivative, pdsolve, Transformation, ComposeTransformations, находим действие $\overline{G}$ на M как композицию проекции π, левого умножения dotLeft группы $\overline{G}$ на $\overline{G}$ и сечения σ:

$$(x=a_1+xe^{-a2}, y=y+a_3, z=z+a_4)$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M:

$$[D_x, -xD_x, D_y, D_z].$$

Используя команду IsotropySubalgebra, получаем стабилизатор, т.е. группу G

$$[-xD_x].$$

Если M – односвязное полное риманово многообразие, то M изометрично прямому произведению $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_r$, где M_0 – евклидово пространство (возможно, нулевой размерности), а $M_1, \ldots, M_r$ – односвязные полные неприводимые римановы многообразия, такое разложение однозначно с точностью до порядка следования сомножителей. Наибольшая связная группа $I^0(M)$ изометрий для M естественным образом изоморфна прямому произведению наибольших связных групп $I^0(M_i)$ изометрий сомножителей M_i. Отсюда следует, что M есть однородное риманово многообразие тогда и только тогда, когда однородными римановыми многообразиями являются и сомножители $M_0,\dots,M_r$.

Пусть далее M – односвязное однородное пространство с инвариантной римановой метрикой. Тогда существуют связные замкнутые подгруппы $\overline{G}_0,\dots,\overline{G}_r$ в $\overline{G}$, каждая из которых содержит G, такие, что каждый множитель наделен инвариантной римановой метрикой ($\overline{G}_i$ может и не быть эффективной на $\overline{G}_i / G$). Хотя это утверждение верно для односвязных однородных римановых многообразий, желательно иметь, пусть при более сильных предположениях, разложение следующего типа:

$$\overline{G} = \overline{G}_0 \times \overline{G}_1 \times \dots \times \overline{G}_r,\ \ G = G_0 \times G_1 \times \dots \times G_r.$$

Действительно, пусть M – односвязное естественно редуктивное однородное пространство с $ad(G)$–инвариантным разложением $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ и инвариантной римановой метрикой g. Пусть

$$T_0(M) = T_0^0 \times \dots \times T_0^r \ –$$

разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ и

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_r \ –$$

соответствующее разложение для $\mathfrak{m}$ при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$. Положим

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m},\mathfrak{m}],\quad \mathfrak{f}_i = \mathfrak{m}_i + [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i],\quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{f}_i \cap \mathfrak{g} \text{ для } i = 0,1,\dots,r.$$

Тогда $\mathfrak{f}_i$ – идеалы в $\overline{\mathfrak{g}}$ и

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + \dots + \mathfrak{f}_r \ –$$

прямая сумма алгебр Ли и имеют место следующие соотношения

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{m}_i] \in \mathfrak{m}_i,\quad [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i] \in \mathfrak{m}_i + \mathfrak{g},\quad [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j] = 0 \text{ для } i \neq j,\ i,j = 0,1,\dots,r.$$

Если $\overline{G}$ – связная группа, а $\overline{G} / G$ односвязно, то простые гомотопические рассуждения показывают, что G связна. Беря универсальную накрывающую группу для $\overline{G}$ вместо $\overline{G}$, мы можем считать, что $\overline{G}$ односвязна; $\overline{G}$ остается почти эффективной на $\overline{G} / G$, хотя, быть может, уже не эффективной. Так как $\overline{G}$ односвязна, то нормальные подгруппы $\overline{G}_0,\overline{G}_1,\dots,\overline{G}_r$ для $\overline{G}$, порожденные идеалами $\mathfrak{f}_0,\mathfrak{f}_1,\dots,\mathfrak{f}_r$. соответственно, замкнуты и односвязны. Если мы положим $G_i = \overline{G}_i \cap G$, то $\overline{G}_i / G_i$ будут естественно редуктивны, и

$$\overline{G} / G = \overline{G}_0 / G_0 \times \overline{G}_1 / G_1 \times \dots \times \overline{G}_r / G_r$$

совпадает с разложением де Рама для M.

Естественно теперь рассмотреть случай, когда $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{m})$. Если $ad(G)$–инвариантное скалярное произведение B на $\mathfrak{m}$, соответствующее метрике g, может быть продолжено до $ad(\overline{G})$–инвариантной невырожденной билинейной симметричной формы B на $\overline{\mathfrak{g}}$ такой, что $B(\mathfrak{m},\mathfrak{g}) = 0$, то

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + \dots + \mathfrak{f}_r.$$

В более общей форме в тех же предположениях имеем

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m},\mathfrak{m}].$$

Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой — кривизной. Секционная кривизна римановых однородных пространств вычисляется по формуле

$$K(x,E) = \frac{B(R(Y,Z)Y,Z)}{B(Y,Y)B(Z,Z) - B(Y,Z)^2},$$

где $x \in M$, E – невырожденное плоское сечение в M_x, $\{Y,Z\}$ – базис в E.

Для псевдоримановых однородных пространств понятие секционной кривизны может быть введено уже не для всех двумерных направлений, т.к. определитель Грама (стоящий в знаменателе определения секционной кривизны), обращается в нуль для изотропных двумерных направлений (т. е. таких, на которых индуцируется вырожденная метрика, если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие секционной кривизны можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности). Выписаны секционные кривизны римановых (псевдоримановых) однородных пространств, а также разложение де Рама.

Также библиотека plots системы Maple предоставляет возможности построения трехмерной динамической компьютерной модели геодезических, оснащенной динамическим цифровым, языковым и графическим сопровождением.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут иметь приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др. Применение системы компьютерной математики Maple позволяет облегчить трудоемкие вычисления и справиться с проблемами, которые многие ученые ранее считали неразрешимыми. В частности, в данной работе пришлось исследовать более пятисот трехмерных изотропно-точных пар.

Список литературы

1. Hlavova M. Two-parametric motions in the Lobatchevski plane / M. Hlavova // J. Geom. Graph. - 2002. - V. 6. - №1. - P. 27-35.

2. Rodionov E.D. Conformal deformations of the Riemarmian metrics and homogeneous Riemannian spaces / E.D. Rodionov, V.V. Slavskii // Comm. Math. Univ. Carol. - 2002. - V. 43. - №2. - P. 271-282.

3. Arias-Marco T. Classification of 4-dimensional homogeneous D’Atry spaces / T. Arias-Marco, O. Kovalski // ICM 2006 - Posters. Abstracts. Section 5. - Madrid, 2006. - P. 1-2.

4. Kovacs L. An algorithm for automated generation of invariants for loops with conditions / L. Kovacs. T. Jebelean Proceedings of the Computer-Aided Verification on Information Systems Workshop (CAVIS05), 7th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC05).-Timisoara, 2005. – P. 16-19.

5. Arias-Marco T. A property of Wallach's flag manifolds / T. Arias-Marco // Archivum mathematicum(BRNO). - 2007. - V. 43. - P. 307-319.

6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд – М., 1989. – 472 с.

7. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик - М.: Физ. – мат. лит., 1995, 344 с.

8. Komrakov B. Three–dimensional isotropically–faithful homogeneous spaces / B. Komrakov, A. Tchourioumov, N. Mozhey - V. I–III, Preprints Univ. Oslo, no. 35–37 (1993).

9. Greub W. Connections, curvature and cohomology / W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone - Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, N. Y.– L., 1975.