

УДК 621.391.7:512.772

## ФУРЬЕ-АНАЛИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОСИНУСОИДАЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ И ЕЕ ЗАДЕРЖАННОЙ КОПИИ

М.Ю. ХОМЕНОК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 14 июня 2016

Приведены основные результаты анализа энергетического спектра произведения фазоманипулированного сигнала на полутактовой поднесущей и ее задержанной копии в соответствии с материалами депонированной рукописи [1].

*Ключевые слова:* ряд Фурье, энергетический спектр, корреляционный анализ, псевдослучайная последовательность, фазоманипулированный сигнал.

### Введение

В работе [2] выполнен анализ энергетического спектра произведения задержанных друг относительно друга двух копий псевдослучайной последовательности прямоугольных импульсов (ПСП ПИ), а в [3] – для сигнала с фазовой манипуляцией на  $180^\circ$  по закону ПСП.

Отличительной особенностью энергетического спектра в обоих случаях является наличие гармоник на тактовой частоте. Поэтому данный тип функционального преобразования находит применение для формирования опорного колебания, когерентного с тактовой частотой информационной последовательности [2].

Как следует из [1], в режиме детектирования с преобразованием частоты процесс на выходе преобразователя соответствует фазоманипулированному сигналу (ФМНС) на полутактовой поднесущей, который в режиме синхронизма соответствует псевдослучайной последовательности косинусоидальных импульсов (ПСП КИ), спектральные свойства которой представляют практический интерес также в системах передачи на основе модуляции минимальным сдвигом.

### Энергетический спектр произведения псевдослучайной последовательности косинусоидальных импульсов и ее задержанной копии

С целью анализа энергетического спектра определим амплитудный спектр произведения сигнала с манипуляцией фазы на  $180^\circ$  на полутактовой поднесущей по закону ПСП и его задержанной во времени копии.

Представим ФМНС в виде

$$S(t) = \sqrt{2}S_o A(t) \cos(2\pi f_o t + \varphi_o), \quad (1)$$

где  $S_o$  – амплитуда ФМНС;  $A(t) \in \pm 1$  – информационная последовательность;  $f_o$ ,  $\varphi_o$  – соответственно, частота и начальная фаза несущего колебания ФМНС.

Следовательно, произведение ФМНС и его задержанной во времени копии определится как

$$S'(t) = S(t) S(t - \tau) = S_o^2 A(t) A(t - \tau) \left[ \cos(2\pi f_o \tau) + \cos(2\pi 2f_o t - 2\pi f_o \tau + 2\phi_o) \right]. \quad (2)$$

Если  $S_o A(t)$  – псевдослучайная последовательность прямоугольных импульсов (ПСП ПИ), то энергетический спектр произведения ПСП ПИ и ее задержанной во времени копии

$$S_o^2 A(t) A(t - \tau) \quad (3)$$

в интервале  $|\tau| < \tau_{\Pi}$  задается следующим выражением [2]:

$$N(f, \tau) = S_o^4 \left[ 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\Pi}} \left( 1 + \frac{1}{N} \right) \right]^2 \delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_o^4}{(\pi n)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi n \tau}{\tau_{\Pi}} \right) \delta \left( f - \frac{n}{\tau_{\Pi}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_o^4 (N+1)}{(\pi n)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi n \tau}{N\tau_{\Pi}} \right) \delta \left( f - \frac{n}{N\tau_{\Pi}} \right), \quad (4)$$

где  $N$  – число элементарных символов в ПСП;  $\tau_{\Pi}$  – длительность элементарного символа;  $\tau$  – время задержки;  $\delta(f)$  – дельта-функция;  $N(f, \tau)$  – энергетический спектр сигнала (3).

Соответственно, амплитудный спектр  $G_a(f, \tau)$  произведения ПСП ПИ и ее задержанной во времени копии равен

$$G_a(f, \tau) = S_o^2 \left[ 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\Pi}} \left( 1 + \frac{1}{N} \right) \right] \delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_o^2}{\pi n} \left| \sin \left( \frac{\pi n \tau}{\tau_{\Pi}} \right) \right| \delta \left( f - \frac{n}{\tau_{\Pi}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_o^2 \sqrt{N+1}}{\pi n} \left| \sin \left( \frac{\pi n \tau}{N\tau_{\Pi}} \right) \right| \delta \left( f - \frac{n}{N\tau_{\Pi}} \right). \quad (5)$$

Поэтому амплитудный спектр сигнала в (2) определится в соответствии с выражением

$$S_o^2 \left[ 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\Pi}} \left( 1 + \frac{1}{N} \right) \right] \left[ \delta(f) \cos(2\pi f_o \tau) + \delta(f - 2f_o) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_o^2}{\pi n} \left| \sin \left( \frac{\pi n \tau}{\tau_{\Pi}} \right) \right| \left[ \delta \left( f - \frac{n}{\tau_{\Pi}} \right) \cos(2\pi f_o \tau) + 1/2 \delta \left( f - 2f_o \pm \frac{n}{\tau_{\Pi}} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_o^2 \sqrt{N+1}}{\pi n} \left| \sin \left( \frac{\pi n \tau}{N\tau_{\Pi}} \right) \right| \left[ \delta \left( f - \frac{n}{N\tau_{\Pi}} \right) \cos(2\pi f_o \tau) + 1/2 \delta \left( f - 2f_o \pm \frac{n}{N\tau_{\Pi}} \right) \right]. \quad (6)$$

Если  $f_o = 1/2 f_T$ , а  $\phi_o = 1/2 \phi_T$ , то сигнал, определенный в (1), имеет смысл ФМНС на полугаковой поднесущей. В этом случае, как показывает анализ слагаемого

$$\frac{S_o^2}{\pi n} \left| \sin \left( \frac{\pi n \tau}{\tau_{\Pi}} \right) \right| \delta \left( f - 2f_o \pm \frac{n}{\tau_{\Pi}} \right),$$

в (6) при  $n=1$  и  $\tau = 1/2 \tau_{\Pi}$  в спектре сигнала (2), имеют место биения между гармоникой спектра сигнала (3) на тактовой частоте и несущим колебанием сигнала (2) также на тактовой частоте, т.е.

$$A_T(\tau) \sin(2\pi f_T t + \phi_T) \cos(2\pi 2f_o t - 2\pi f_o \tau + 2\phi_o),$$

где  $A_T(\tau)$ ,  $\phi_T$  – соответственно, амплитуда и начальная фаза гармоники спектра сигнала (3) на тактовой частоте, определяемой значащими моментами ПСП.

В результате этих биений в спектре сигнала (2) возникает составляющая, равная

$$1/2 A_T(\tau) \sin[2\pi(f_T - 2f_o)t + 2\pi f_o \tau + \varphi_T - 2\varphi_o] \quad (7)$$

и соответствующая при  $f_o = 1/2 f_T$  и  $\tau = 1/2 \tau_{и}$  дискриминационной характеристике фазовой автоподстройки:

$$1/2 A_T(\tau_{и}/2) \sin(\pi/2 + \varphi_T - 2\varphi_o), \quad \text{где } 1/2 A_T(\tau_{и}/2) = S_o^2/\pi.$$

Другой особенностью спектра сигнала (2) является составляющая при  $f_o \neq 1/2 f_T$ , определяемая выражением

$$S_o^2 [1 - 1/2(1 + 1/N)] \cos(2\pi f_o \tau),$$

которое при  $f_o = 1/2 f_T + \Delta f$ ,  $\tau = 1/2 \tau_{и}$  приводится к виду

$$1/2 S_o^2 \cos[(1/2 f_T + \Delta f) \tau_{и}] = 1/2 S_o^2 \cos(\pi/2 + \pi \Delta f \tau_{и}) = -A_n \sin(\pi \Delta f \tau_{и}), \quad (8)$$

где  $A_n = 1/2 S_o^2$  – постоянная составляющая сигнала (3). Равенство (8) соответствует дискриминационной характеристике частотной автоподстройки с полосой захвата  $\Delta f = \pm 1/2 f_T$ , реализуемой в схеме многочастотного дискриминатора.

При  $f_o = 1/2 f_T$ ,  $\varphi_o = 1/2 \varphi_T$ ,  $\tau = 1/2 \tau_{и}$  выражение (4) определяет амплитудный спектр произведения смещенных во времени на полтакта друг относительно друга копий последовательноности косинусоидальных импульсов (КИ), образованной произведением ПСП ПИ и полутактовой поднесущей, синхронной с ее значащими моментами. Этот спектр определяется выражением

$$\begin{aligned} & \frac{S_o^2}{\pi} \delta(f) + 1/2 S_o^2 \left[ 1 - 1/2 \left( 1 + \frac{1}{N} \right) \right] \delta(f \pm f_T) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2n S_o^2}{\pi(4n^2 - 1)} \left| \sin \left( \frac{\pi(2n-1)}{2} \right) \right| \delta \left( f - \frac{2n}{\tau_{и}} \right) \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_o^2 \sqrt{(N+1)}}{2\pi n} \left| \sin \left( \frac{\pi n}{2N} \right) \right| \delta \left( f \pm f_T - \frac{n}{N\tau_{и}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Как следует из (9) и как это показано на рисунке, в этом случае спектр содержит постоянную составляющую и гармоники, наиболее интенсивные из которых расположены на частотах  $f_T$  и  $2nf_T$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Для получения произведения копий ПСП КИ, задержанных друг относительно друга на полтакта, необходимо функцию (9), определяющую спектр сигнала (2) при указанном выше условии, умножить на периодическую последовательность прямоугольных импульсов (ПП ПИ) тактовой частоты и единичной амплитуды, ряд Фурье для которой имеет вид:

$$A_{10}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)} \sin \left[ \frac{2\pi}{\tau_{и}} (2n-1)t + \varphi_T \right]. \quad (10)$$

Это эквивалентно умножению сигнала (2) при  $f_o = 1/2 f_T$ ,  $\varphi_o = 1/2 \varphi_T$ , на ПП ПИ полутактовой частоты. Тогда гармоническая составляющая на тактовой частоте в спектре произведения ПСП КИ с ее задержанной во времени на  $\tau_{и}/2$  копии определится путем биений гармоник спектра (9) на частотах  $2n/\tau_{и}$  с гармониками ПП ПИ (10) на частотах  $(2n-1)/\tau_{и}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и произведением постоянной составляющей спектра (9) на гармонику тактовой частоты ПП ПИ (10).

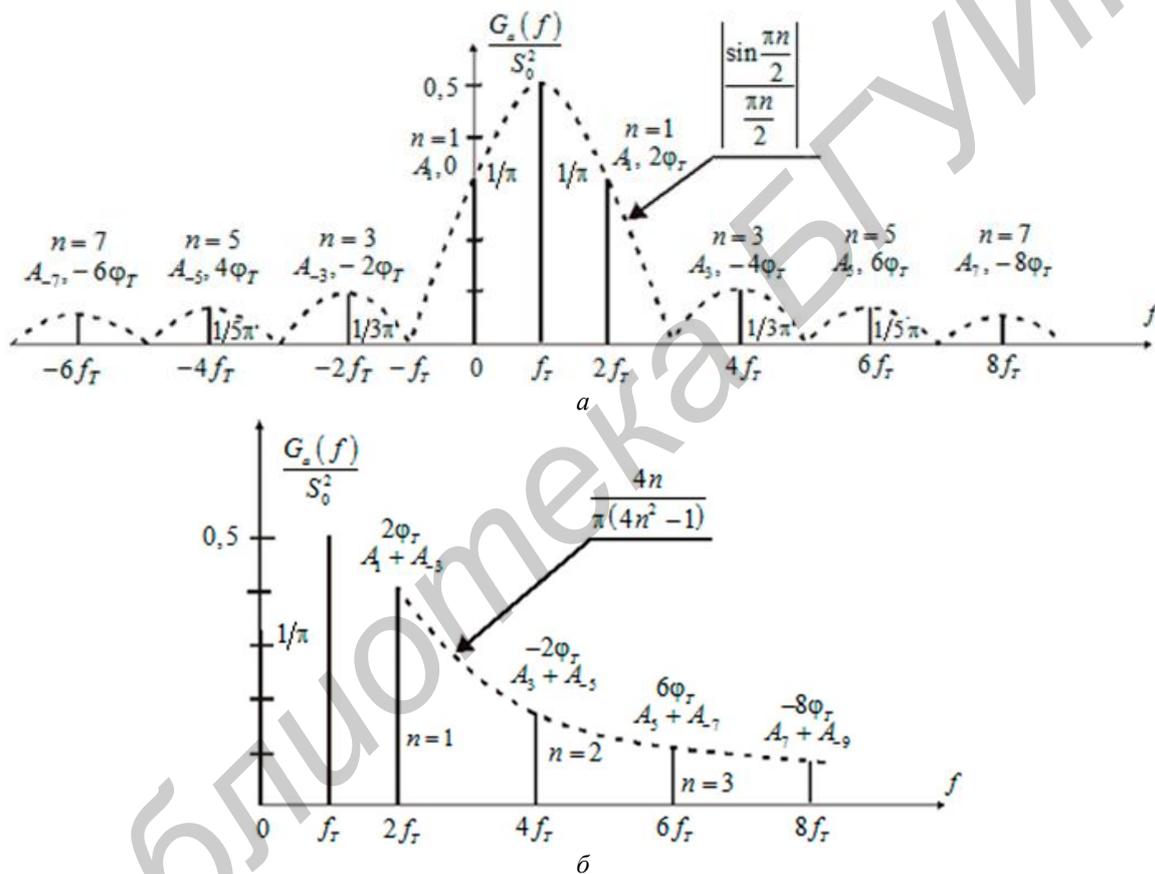
Таким образом, с учетом того, что амплитуды гармоник в (9) на частотах  $2n/\tau_{и}$  модулированы по знаку в соответствии с  $(-1)^{n-1}$ , амплитуда гармоники на тактовой частоте в спектре произведения копий ПСП КИ, задержанных друг относительно друга на полтакта, равна

$$\frac{4S_o^2}{\pi^2} \left[ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \right] = \frac{6S_o^2}{\pi^2}, \text{ где } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{1}{8}.$$

При этом постоянная составляющая определится биениями гармоник на тактовой частоте сигналов (2) и (10) и окажется равной  $S_o^2/\pi$ .

В таблице для сравнения приведены значения постоянной составляющей и амплитуд гармоник на тактовой частоте в спектре произведения задержанных на пол такта друг относительно друга копий ПСП ПИ и ПСП КИ.

Составляющая спектра	ПСП ПИ	ПСП КИ
Постоянная составляющая	$1/2 S_o^2$	$S_o^2/\pi$
Гармоника на тактовой частоте	$2S_o^2/\pi$	$6S_o^2/\pi^2$



Дискретные составляющие амплитудного спектра произведения двух смещенных на полтакта друг относительно друга копий последовательности косинусоидальных импульсов:

*a* – математический спектр; *б* – физический спектр

### Заключение

Анализ дискретных компонент спектра (6) на нулевой и тактовой частотах, определяемых соответственно выражениями (7) и (8), для сигнала (2) в режиме отсутствия синхронизма между значащими моментами манипулирующей последовательности и поднесущей показывает возможность реализации совместной схемы частотно-фазовой автоподстройки на основе схемы многочастотного дискриминатора [1]. Это дает дополнительные возможности для оптимизации точности слежения и динамики работы системы синхронизации.

В системах тактовой синхронизации, использующих данный тип нелинейного преобразования для косинусоидальной формы несущего импульса, энергетические потери по мощности, как следует из сравнения результатов, приведенных в таблице, составляют ~0,4 дБ.

Снижение энергетика на гармонике тактовой частоты в  $\pi^2/9$  раз, обусловлено гладкой формой косинусоидального типа несущего импульса и, как результат, следует уменьшение крутизны его фронта по отношению к импульсу прямоугольной формы.

## **FOURIER ANALYSIS OF PRODUCT FOR BOTH A PSEUDORANDOM SEQUENCE OF COSINE PULSES AND ITS DETAINED COPY**

M.J. HOMENOK

### **Abstract**

The article reflects the main results of energy spectrum analysis of the phase manipulated signal on the subcarrier of half frequency clock signal in compliance with the deposit manuscript [1].

*Keywords:* Fourier series, power spectrum, correlation analysis, pseudorandom sequence, phase-shift keyed signal.

### **Список литературы**

1. Хоменок М.Ю. // Деп. в БелНИИИТИ №805Бе-Д83. 1983.
2. Стилкер Дж. Цифровая спутниковая связь. М., 1979.
3. Чердынцев В.А., Ходасевич Р.Г. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. С. 427-431.