НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
mozheynatalya@mail.ru

Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан. Многообразия с нулевым кручением (т. е. плоской нормальной связностью) исследовали почти одновременно Д. И. Перепелкин и Ф. Фабрициус-Бьерре. Итоги этих исследований подведены в монографии Чена [1]. Ряд исследований посвящен общим вопросам нормальных связностей, их интересную характеристику дал К. Номидзу [2].

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Пусть

$\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Все такие пары $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [3], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные однородные пространства — трехмерные группы Ли.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., например, [4]). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $x, y \in \bar{g}$; тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \bar{g}.$$

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}l(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}l(3, \mathbb{R})$ вида

$$V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots,$$

где V — подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре в $\mathfrak{g}l(3, \mathbb{R})$, порожденной множеством

$$\{\Lambda(x);\ x \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Первоначально $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем [5] и Г. Ваном в более общей ситуации. Говорят, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

Найдены все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 3, допускающие нормальную связность, все аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии и определено, при каких условиях связность является нормальной.

Литература

1. Chen Bang-Yen *Geometry of submanifoids* // Pure and Appl. Math. Vol. X, no. 22. New York: Marcel Dekker, 1973. 308 p.

2. Nomizu K. *Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions* // Tohoku Math. J. 1976. Vol. 28, no. 1. P. 613–617.

3. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces.* Preprints Univ. Oslo, 1993. Vol. I–III, no. 35–37.

4. Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76., no. 1. P. 33–65.

5. Lichnerowicz A. *Geometrie des Groupes de Transformations.* Paris: Dunod, 1958.