Исследование однородных пространств с использованием систем компьютерной математики

Можей Н.П. e-mail: mozheynatalya@mail.ru
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

У систем аналитических вычислений широкая область применения в разных отраслях науки, поскольку они имеют большой выбор инструментов, позволяющий решать научные задачи, обладают универсальными возможностями, причем постоянно совершенствуются, развивая, в частности, математический аппарат; уже нет необходимости программировать компьютер для решения типовых математических задач. Геометрия, в том числе и дифференциальная, использует современные компьютерные технологии для исследования своих проблем, например, пакеты прикладных программ применяются в классификационных задачах. Данная работа посвящена применению математических пакетов для нахождения трехмерных однородных пространств, а также алгебр Ли векторных полей, когомологий, действий групп Ли, аффинных связностей, тензоров кривизны, кручения и геодезических на этих пространствах. Наиболее эффективное решение этих задач возможно в системах компьютерной математики, в частности, в системе Maple. Одна из самых мощных и популярных систем компьютерной математики Maple в диалоговом режиме решает огромное число математических задач, имеет огромные вычислительные возможности, мощные графические средства и встроенный язык программирования. Она позволяет проводить не только вычисления, но и символьные преобразования математических выражений, автоматизирует выполнение расчетов различной степени сложности, позволяет повести визуализацию решения задачи.

Сначала получена локальная классификация трехмерных однородных пространств как пар алгебр Ли. Далее для каждой такой пары используем пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor и другие. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, (M, $\overline{G}$) – однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\overline{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\overline{G}$, G), где $G \subset \overline{G}$, т.к. многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G} / G$ (см., например, [1]).

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно–точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [2], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$–инвариантным. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия.

Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M. В работе [3] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств. Для когомологии разрешимых алгебр Ли известны лишь немногие сколько-нибудь общие утверждения. Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α, через C_1 – множество $(p-1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, C_2 – множество p–форм, C_3 – множество $(p+1)$–форм и т.д., пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$, пустое множество будем записывать $\{\}$. Пусть $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пространство внешних p–форм, алгебра Ли когомологий $H^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ степени p – векторное пространство замкнутых p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ по модулю точных p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Обозначим H_1 – множество p–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 – множество $(p+1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т.д., т.е. $H = \{H_1, H_2, H_3, ...\}$ – множество всех замкнутых форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Начнем с построения всех трехмерных однородных пространств. Все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [2]. Используем пакет DifferentialGeometry, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Рассмотрим, например, пару 1.1.1 (см. [2]). Алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ четырехмерна. Ее таблица умножения при λ=0 имеет вид

$$[e_1, e_2] = -e_1$$

(остальные структурные константы нулевые), при этом подалгебра h = $[e_1]$. Сначала вычислим когомологии трехмерного однородного многообразия. Используем пакеты LieAlgebras, Tensor, LieAlgebraCohomology, зададим LieAlgebraData алгебру Ли с указанной таблицей умножения. Находим когомологии

C := RelativeChains(h); H := Cohomology(C).

Получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3,\ \theta_4\},\{-\theta_3 \wedge \theta_4\},\{\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_4,\ \theta_3\},\{-\theta_3 \wedge \theta_4\},\{\}\}$$

Аналогично, при λ=-1 получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},$$

$$H=\{\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Определим по алгебре локальные координаты группы Ли $\bar{G}$, транзитивно действующей на однородном пространстве. Сначала определим группу при помощи команд DGsetup и LieGroup. Умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1 = a_1 + x_1 e^{(-a_3)}, x_2 = a_2 + x_2 e^{a_3}, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли (функция LieAlgebraData):

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + D_{x_3}, D_{x_4}).$$

Обозначим координаты (x, y, z) на M и вычислим действие группы $\bar{G}$ на многообразии M:

$$(x = a_1 + x e^{(-a_3)}, y = a_2 + y e^{a_3}, z = z + a_4).$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M:

[D_x ; D_y; -xD_x + y D_y; D_z].

Убеждаемся, что структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с исходными. Подалгебра, являющаяся алгеброй Ли стабилизатора (IsotropySubalgebra), имеет вид

[-xD_x + y D_y].

Тензор Ω на группе Ли выпишем в виде левоинвариантной формы Мауэра−Картана (с точностью до константы):

$$\Omega = dx_1 dx_2 + dx_2 dx_1 + \beta dx_4 dx_4.$$

Этот тензор является инвариантным относительно подалгебры изотропии. Сведем этот инвариантный тензор (PushPullTensor) на группе Ли $\overline{G}$ к инвариантной невырожденной метрике на M:

$$g = dxdy + dydx + \beta dzdz.$$

Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга (KillingVectors) для метрики. Полная алгебра инфинитеземальных изометрий метрики g:

$$(-zD_x + \frac{yD_z}{\beta}, \frac{D_z}{\beta}, -zD_y + \frac{xD_z}{\beta}, xD_x - yD_y, D_x, D_y).$$

Символы Кристоффеля (Christoffel) для g: $C = 0$. Тензор кривизны (CurvatureTensor) нулевой. Вычислив первую ковариантную производную кривизны (CovariantDerivative): $R_1 = 0$, убедились, метрика постоянной кривизны, метрика является конформно плоской (CottonTensor), тензор кручения (TorsionTensor) нулевой, т.е. связность без кручения.

Если $\{x(t); y(t); z(t)\}$ − кривая на M, тогда уравнения геодезических относительно связности –− это система ОДУ второго порядка. Найдем вектор (GeodesicEquations), компоненты которого − уравнения на геодезические:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0\right\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка (dsolve), получаем геодезические:

$$\left\{x(t) = C_5 t + C_6, \mathrm{y}(t) = C_3 t + C_4, z(t) = C_1 t + C_2\right\}.$$

Также библиотека plots предоставляет возможности построения динамической компьютерной модели геодезических, оснащенной динамическим цифровым, языковым и графическим сопровождением.

Аналогично, при $\lambda=0$ умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1=a_1+x_1e^{-a2}, x_2=x_2+a_2, x_3=x_3+a_3, x_4=x_4+a_4)$$

Используя ComplementaryBasis, находим дополнительный базис и определяем, является ли пара редуктивной.

Алгебры Ли право и левоинвариантных векторных полей:

$[D_{x1}, -x_1D_{x1}+D_{x2}, D_{x3}, D_{x4}]$, $[e^{-x2}D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}, D_{x4}]$.

Применяя LieDerivative, pdsolve, Transformation, ComposeTransformations, находим действие $\overline{G}$ на M как композицию проекции π, левого умножения dotLeft группы $\overline{G}$ на $\overline{G}$ и сечения σ:

$(x=a_1+xe^{-a2}, y=y+a_3, z=z+a_4)$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M:

$[D_x, -xD_x, D_y, D_z]$.

Используя команду IsotropySubalgebra, получаем стабилизатор, т.е. группу G

$[-xD_x]$.

Секционная кривизна римановых однородных пространств вычисляется по формуле

$$K(x,E) = \frac{B(R(Y,Z)Y,Z)}{B(Y,Y)B(Z,Z) - B(Y,Z)^2},$$

где $x \in M$, E – невырожденное плоское сечение в M_x, $\{Y,Z\}$ – базис в E. Найдены секционные кривизны римановых (псевдоримановых) однородных пространств, а также разложение де Рама.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут иметь приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др. Применение систем компьютерной математики, а, в частности, Maple, позволяет облегчить трудоемкие вычисления и справиться с проблемами, которые многие ученые ранее считали неразрешимыми. Например, в данной работе пришлось исследовать более пятисот трехмерных изотропно-точных пар.

Литература

1. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик - М.: Физ. – мат. лит., 1995, 344 с.

2. Komrakov B. Three–dimensional isotropically–faithful homogeneous spaces / B. Komrakov, A. Tchourioumov, N. Mozhey - V. I–III, Preprints Univ. Oslo, no. 35–37 (1993).

3. Greub W. Connections, curvature and cohomology / W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone - Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, N. Y.– L., 1975.