Можей Н.П.
УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Трехмерные однородные пространства с полупростой группой преобразований и линейные связности на них

Проблема описания многообразий была поставлена еще в начале позапрошлого века, в дальнейшем были классифицированы различные специальные классы многообразий. Наиболее интересным как с математической, так и с физической точки зрения является однородный случай. Большинство физических моделей являются однородными, и это условие часто бывает априорным, большинство пространств, появляющихся в различных разделах математики, тесно связанных с приложениями, также считаются однородными. Условие однородности является принципиальным и с математической точки зрения, оно позволяет свести задачу к чисто алгебраической, позволяет применить технику теории групп и алгебр Ли.

Двумерные однородные пространства были классифицированы локально Софусом Ли и глобально Г. Мостовым. С. Ли еще получил некоторые результаты в классификации трехмерных однородных пространств и описал все подалгебры алгебры Ли $gl(3, \mathbb{C})$. Проблема нахождения полной классификации трехмерных однородных пространств как пар (группа, подгруппа) или даже (алгебра, подалгебра) очень важна для многих приложений, но также и очень сложна.

Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно точные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную линейную связность. Работа посвящена также описанию линейных связностей на однородных пространствах. В теории однородных пространств линейной связности рассматриваются как задача описания инвариантных линейных связностей на данном однородном пространстве, так и задача перевода на алгебраический язык понятий дифференциальной геометрии для данной инвариантной линейной связности. Первая задача многими математиками решалась, в основном, в части выяснения вопроса о возможности введения хотя бы одной связности. В работе описываются все линейные связности на трехмерных изотропно-точных однородных пространствах, на которых транзитивно действует полупростая группа Ли, причем стабилизатор действия также полупрост, а также проводится в алгебраических терминах задание произвольной линейной связности на любом однородном пространстве.

Пусть M – дифференцируемое многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа G, (M, G) – однородное пространство, G_0 – стабилизатор произвольной точки o. Пусть g – алгебра Ли группы Ли G, а g_0 – подалгебра, соответствующая подгруппе G_0. Проблема классификации однородных пространств (M, G) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (G, G_0) (см., например, [1]). Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации пар алгебр Ли (g, g_0) с точностью до эквивалентности пар. Строение пар групп Ли (G, G_0), соответствующих данной паре алгебр Ли (g, g_0), было описано в [2].

Линейной связностью на паре (g, g_0) называется такое отображение $\Lambda : g \to gl(V)$, где $V = g\ /\ g_0$, что его ограничение на g_0 есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g_0-инвариантным. Хорошо известно (см., например, [3]), что инвариантные линейные связности на однородном пространстве (M, G) находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными связностями на паре (g, g_0). Тензор кручения имеет вид $T(x_V, y_V) = \Lambda(x)y_V - \Lambda(y)x_V - \left[x, y\right]_V$ для всех $x, y \in g$, а тензор кривизны – $R(x_V, y_V) = \left[\Lambda(x), \Lambda(y)\right] - \Lambda(\left[x, y\right])$. Алгеброй голономии связности на паре (g, g_0) называется подалгебра вида

$$V + [\Lambda(g), V] + [\Lambda(g), [\Lambda(g), V]] + \ldots, \text{ где}$$
$$V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in g\}.$$

Отождествим V с R^3 и зафиксируем в нем базис $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Найдем все пары, где g и g_0 полупросты. Оказалось, что во всех случаях алгебра g имеет размерность 6. Зафиксируем базис алгебры $g = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$, тогда базис подалгебры $g_0 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, а базис V – дополнительный к базису g_0. Таблица умножения алгебры g имеет один и только один из следующих видов:

0	e_2	$-e_3$	e_4	0	$-e_6$
$-e_2$	0	e_1	0	e_4	e_5
e_3	$-e_1$	0	e_5	e_6	0
$-e_4$	0	$-e_5$	0	$\pm e_2$	μe_1
0	$-e_4$	$-e_6$	μe_2	0	μe_3
e_6	$-e_5$	0	$\pm e_1$	$\pm e_3$	0

(1-*й* *и* 2-*й* *случай*)

0	e_3	$-e_2$	$-e_6$	0	e_4
$-e_3$	0	e_1	$-e_5$	e_4	0
e_2	$-e_1$	0	0	$-e_6$	e_5
e_6	e_5	0	0	$\pm e_2$	$\pm e_1$
0	$-e_4$	e_6	μe_2	0	$\pm e_3$
$-e_4$	0	$-e_5$	μe_1	μe_3	0

(3-*й* *и* 4-*й* *случай*)

1-*й и* 2-*й случай*. Связность имеет вид

$$\Lambda(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda(e_5) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ \Lambda(e_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Не нарушая общности можно считать, что a неотрицательно. Кривизна

$$R(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(u_1, u_3) = \begin{pmatrix} -a^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \mp 1 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a^2\pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2\pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра голономии совпадает с трехмерным неприводимым представлением sl(2, R) при $a^2 \neq \pm 1$ и коммутативна в противном случае. Тензор кручения $T(u_1, u_2) = 2au_1$, $T(u_1, u_3) = 2au_2$, $T(u_2, u_3) = 2au_3$.

3-*й и* 4-*й случай*. Связность имеет вид

$$\Lambda(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda(e_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda(e_6) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не нарушая общности можно считать, что a неотрицательно. Кривизна

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} 0 & -a^2\mp 1 & 0 \\ a^2\pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a^2\mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2\pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2\mp 1 \\ 0 & a^2\pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра голономии совпадает с su(2) при $a^2 \neq \pm 1$ (иначе коммутативна). Тензор кручения $T(u_1, u_2) = -2au_3$, $T(u_1, u_3) = 2au_2$, $T(u_2, u_3) = -2au_1$.

Можно записать пары и следующим образом: (sl(2, R)×sl(2, R), sl(2, R)), (sl(2, C)$_R$, sl(2, R)), (sl(2, C)$_R$, su(2)), (su(2)× su(2), su(2)). В качестве подалгебры в первых двух случаях выступает трехмерное неприводимое представление sl(2, R).

Для указанных пространств найдем также секционную кривизну

$$K(u_i, u_j) = \frac{B(R(u_i, u_j)u_i, u_j)}{B(u_i, u_i)B(u_j, u_j) - B(u_i, u_j)^2}:$$

	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$
1-*й случай*	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
2-*й случай*	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
3-*й случай*	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
4-*й случай*	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$

Тензорное поле Риччи S - ковариантное тензорное поле степени 2, т.ч.

$$S(X,Y) = \operatorname{tr} V \to R(V,X)Y \text{ для } X,Y,V \in Tx(M).$$

Тензоры Риччи указанных однородных пространств имеют вид:

1-*й случай*

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & -2a^2+2 \\ 0 & 2a^2-2 & 0 \\ -2a^2+2 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

2-*й случай*

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & -2a^2-2 \\ 0 & 2a^2+2 & 0 \\ -2a^2-2 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

3-*й случай*

$$\begin{array}{|ccc|}\hline -2a^2-2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2-2 \\ \hline\end{array}$$

4-*й случай*

$$\begin{array}{|ccc|}\hline -2a^2+2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2+2 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2+2 \\ \hline\end{array}$$

Действительно, рассмотрим, например, 1-*й случай*, тогда тензор Риччи

$0-R(u_1,u_2)_{2,1}-$ $-R(u_1,u_3)_{3,1}$	$0-R(u_1,u_2)_{2,2}-$ $-R(u_1,u_3)_{3,2}$	$0-R(u_1,u_2)_{2,3}-$ $-R(u_1,u_3)_{3,3}$
$R(u_1,u_2)_{1,1}-$ $-R(u_2,u_3)_{3,1}$	$R(u_1,u_2)_{1,2}-$ $-R(u_2,u_3)_{3,2}$	$R(u_1,u_2)_{1,3}-$ $-R(u_2,u_3)_{3,3}$
$R(u_1,u_3)_{1,1}+$ $+R(u_2,u_3)_{2,1}$	$R(u_1,u_3)_{1,2}+$ $+R(u_2,u_3)_{2,2}$	$R(u_1,u_3)_{1,3}+$ $+R(u_2,u_3)_{2,3}$

Тензор имеет вид, приведенный выше.

Для остальных однородных пространств рассуждения аналогичны.

Описаны все линейные связности на трехмерных изотропно-точных однородных пространствах, на которых транзитивно действует полупростая группа Ли, причем стабилизатор действия также полупрост. Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию всех локально однородных линейных связностей на трехмерных пространствах. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

Использованные истоники:

1. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физ. - мат. лит., 1995. – 344 с.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.:Наука, 1981. – 344 с.

3. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu. // Amer. Journ. Math – 1954. – Vol. 76., № 1. – P. 33–65.