

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра вычислительных методов и программирования

А. К. Сеницын

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
для специальности 1-39 02 03 «Медицинская электроника»
в качестве учебно-методического пособия*

Минск БГУИР 2013

УДК 517.58(076)
ББК 22.161я73
С38

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем
Белорусского национального технического университета
(протокол №3 от 15.11.2012 г.);

главный научный сотрудник учреждения Белорусского государственного
университета «Научно-исследовательский институт прикладных проблем
математики и информатики», доктор физико-математических наук,
профессор В. Т. Ерофеевко

Синицын, А. К.

С38 Специальные математические методы и функции : учеб.-метод. по-
сobie / А. К. Синицын. – Минск : БГУИР, 2013. – 72 с. : ил.
ISBN 978-985-488-950-4.

В пособии представлены элементы функционального анализа, изложена теория
интегральных преобразований Фурье и Лапласа, рассмотрены основные методы ре-
шения задач линейной алгебры, уравнений математической физики, описаны функции
Бесселя и элементы вариационного исчисления.

Адресовано студентам специальности «Медицинская электроника». Может
быть полезно магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теории
сигналов и решении задач математической физики.

УДК 517.58(076)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-488-950-4

© Синицын А. К., 2013
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА	7
1.1. Линейные пространства	7
1.2. Линейное нормированное пространство.....	9
1.3. Унитарные пространства. Скалярное произведение и ортогональность ..	11
Вопросы и задания для проверки	14
ЛЕКЦИЯ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	15
2.1. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций.....	15
2.1.1. Классическая форма ряда Фурье.....	15
2.1.2. Комплексная форма ряда Фурье.	16
2.1.3. Ряд Фурье для функции с заданным периодом	17
2.2. Интегральное преобразование Фурье	18
2.2.1. Переход от ряда Фурье к преобразованию Фурье	18
2.2.2. Свойства преобразования Фурье	20
2.2.3. Спектральные функции для некоторых сигналов	22
Вопросы и задания для проверки	25
ЛЕКЦИЯ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ	26
3.1. Линейные операторы.....	26
3.2. Операторные задачи в линейных пространствах и общие методы их решении	28
3.2.1. Итерационный метод.....	28
3.2.2. Проекционный метод.....	30
3.3. Задачи линейной алгебры	30
3.3.1. Вычисление определителя матрицы	30
3.3.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.....	31
3.3.3. Метод Гаусса	33
3.3.4. Решение задачи на собственные значения	34
Вопросы и задания для проверки	36
ЛЕКЦИЯ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	37
4.1. Уравнения математической физики	37
4.2. Основные типы уравнений в частных производных	38
4.3. Два наиболее часто используемых специальных метода решения линейных дифференциальных уравнений	42
4.3.1. Метод комплексных амплитуд	42
4.3.2. Метод разделения переменных Фурье для решения уравнений в частных производных	43
Вопросы и задания для проверки	45
ЛЕКЦИЯ 5. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ.....	46
5.1. Волновое уравнение в цилиндрической системе координат	46

5.2. Уравнения Бесселя	47
5.3. Функции Бесселя первого и второго рода	48
5.3.1. Определения и графики	48
5.3.2. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя первого и второго рода	49
5.3.3. Ортогональная система функций Бесселя первого рода	50
5.3.4. Интегральное представление функции Бесселя	50
5.4. Модифицированные функции Бесселя	51
5.4.1. Определения и графики	51
5.4.2. Рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя первого и второго рода	52
5.5. Наиболее важные асимптотические формулы	52
Вопросы и задания для проверки	52
ЛЕКЦИЯ 6. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	53
6.1. Пример постановки задачи	53
6.2. Общая задача вариационного исчисления, вариация функционала	54
6.3. Общий метод нахождения минимума функционала	57
6.4. Элементарная задача вариационного исчисления	59
Вопросы и задания для проверки	61
ЛЕКЦИЯ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	62
7.1. Преобразование Лапласа	62
7.2. Сеточные функции и разностные уравнения	65
7.2.1. Понятие сеточной функции	65
7.2.2. Разностные уравнения для сеточных функций и их решения	67
7.3. Дискретное Z-преобразование: определение и основные свойства	68
Вопросы и задания для проверки	71
ЛИТЕРАТУРА	72

ВВЕДЕНИЕ

Данный курс создан с ориентацией на изучение дисциплин «Теория сигналов» и «Системы автоматизированного проектирования».

Название «специальные математические функции» в науке употребляется давно. В математике существует набор общепринятых элементарных функций: алгебраические (x^n , x^n/x^p , \sqrt{x}), тригонометрические ($\sin x$, $\cos x \dots$), гиперболические ($\sinh x$, $\cosh x \dots$), логарифмические ($\log_p x$, $\ln x \dots$), экспоненциальные, (e^x , $e^{-x} \dots$). По мере развития теории решения прикладных задач набор таких часто употребляемых функций постепенно расширяется.

Например, в теории вероятности большое значение имеет функция вида

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{функция Лапласа}),$$

с помощью которой определяют вероятности событий, подчиняющиеся нормальному закону распределения. Данный интеграл относится к разряду «неберущихся», т. е. он не может быть точно выражен через конечное число вышеописанных элементарных функций (значение может быть представлено в виде бесконечного ряда). В таком случае математики составляют точную таблицу значений функции $\Phi_0(x)$ и определяют ее как специальную. В результате появился набор специальных функций, представляющих аналогичные «неберущиеся» интегралы, например:

– гамма- и бета-функции $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$; $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{q+p}} dt$;

– интегральный синус и косинус $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$; $Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$;

– интегральный логарифм и экспонента $Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$; $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$;

– интегралы Френеля $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, $C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$;

– эллиптический интеграл $F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$

и целый ряд других подобных специальных функций.

Аналогично имеется класс важных для приложений «нерешаемых» дифференциальных уравнений, решение которых может быть получено в виде бесконечного ряда из комбинаций элементарных функций. Например, уравнение Бесселя:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Математики поступают просто – получают таблицу такой функции и заносят ее в разряд специальных. Так появились, в частности, функции Бесселя $J_n(x)$, которые широко используются при решении задач с цилиндрической геометрией.

Понятие «**специальные математические методы**» довольно условно. В данном курсе оно выделяет классические математические методы, используемые при решении задач, связанных с обработкой сигналов.

Сигнал с математической точки зрения обычно представляет собой функцию, описывающую зависимость некоторой величины от времени t и (или) пространственных переменных x, y, z .

Сигналы могут быть одномерные $s = s(t)$, многомерные $s = s(t, x, y, z)$, стационарные $s = s(x, y, z)$, нестационарные $s = s(t, x)$, дискретные, непрерывные (аналоговые).

При обработке используют различные системы преобразования сигналов (измерительные приборы, фильтры, детекторы, ...). Такие системы имеют вход, на который подается один или несколько сигналов, и выход, с которого снимется обработанный сигнал. Система обработки, таким образом, описывается неким **оператором** T , представляющим алгоритм преобразования входного сигнала в выходной $u(t) = Ts(t)$.



Графическое представление системы преобразования сигнала

Сигналы можно складывать, вычитать, умножать на число так, что в результате опять получается сигнал. Таким образом множество сигналов образует замкнутое относительно этих операций «функциональное пространство».

Поэтому для описания сигналов и методов их обработки используется математическая теория функциональных пространств и операторов, которой уделяется значительное место в настоящем учебном пособии.

Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1.1. Линейные пространства

Линейным пространством E называется всякая совокупность элементов (в дальнейшем – функций, векторов или матриц):

$$E = \{x, y, \dots, u, s, \dots\},$$

над которыми определены две операции сложение:

$$\forall x, y \in E, \quad z = x + y \in E$$

умножение на число:

$$\forall x \in E, \quad \forall a \in P \quad (P - \text{поле чисел}), \quad a \cdot x \in E,$$

подчиняющиеся следующим **аксиомам**:

- 1) $x + y = y + x$; *свойство коммутативности;*
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; *свойство ассоциативности;*
- 3) существует нулевой элемент θ , такой, что $\forall x \in E, x + \theta = x$;
- 4) $\forall x \in E$ существует противоположный $-x$, $x + (-x) = \theta$, т. е. существует операция вычитания;
- 5) $1 \cdot x = x$;
- 6) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$; $a, b \in P$;
- 7) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$; *распределительный закон;*
- 8) $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$.

Одним из следствий аксиом является то, что для любого набора элементов $x_1, \dots, x_n \in E$ их **линейная комбинация** тоже принадлежит E , т. е.

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in E, \quad a_1, \dots, a_n \in P.$$

Примеры линейных пространств

1. Все векторы \vec{x} , $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, отложенные от начала координат O некоторого n -мерного пространства R_n , образуют линейное векторное пространство V_n .

x_1, \dots, x_n – координаты вектора;

операция сложения: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$; $\vec{z} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$;

операция умножения на число a : $\vec{z} = a\vec{x}$; $\vec{z} = (ax_1, \dots, ax_n)$.

2. Множество матриц $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$ образует линейное пространство

M_{mn} . Операции аналогичны, т. к. вектор – частный случай матрицы.

3. Множество функций $\{\dots, f(x), g(x), u(x), \dots\}$ является линейным пространством F .

4. Линейным пространством R является и множество решений линейного дифференциального уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y(x) = 0.$$

Действительно, если $y_1(x), y_2(x)$ – решения, то $z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ тоже решение, если $c_1, c_2 \in P$.

Основной отличительной особенностью линейных пространств от других множеств элементов является тот факт, что в любом линейном пространстве E можно найти такой **набор базисных элементов** (говорят **базис**) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$, через линейные комбинации которых $a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n$ выражается любой элемент из E .

Действительно, для вышеприведенных пространств в качестве **базиса** могут быть выбраны следующие наборы элементов:

1. В трехмерном векторном пространстве V_3 можно выбрать тройку векторов:

$$\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}: \vec{x}_0 = (1, 0, 0), \vec{y}_0 = (0, 1, 0), \vec{z}_0 = (0, 0, 1).$$

Тогда любой вектор $\vec{u} \in V_3$ можно получить в виде

$$\vec{u}(x, y, z) = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0, x, y, z \in P.$$

2. Во множестве матриц M_{22} можно выбрать базис из 4-х матриц:

$$A^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

через которые выражается любая матрица $A \in M_{22}$:

$$A = a_{11}A^{11} + a_{12}A^{12} + a_{21}A^{21} + a_{22}A^{22}, a_{ij} - \text{произвольные числа.}$$

3. Во множестве *аналитических* функций F_a выберем базис из бесконечного набора одночленов: $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, тогда, каждую *аналитическую* функцию в окрестности точки $x = 0$ можно представить в виде степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

4. Рассмотрим пространство R_3 , состоящее из решений дифференциального уравнения третьей степени: $y''' - 4y' = 0$. Выберем базис из 3-х частных решений:

$$\{y_1(x), y_2(x), y_3(x)\} = \{1, e^{2x}, e^{-2x}\}.$$

Тогда любое решение можно представить в виде

$$y(x) = a_1 1 + a_2 e^{2x} + a_3 e^{-2x}.$$

Чтобы можно было представить любой элемент в виде линейной комбинации элементов базиса, необходимо, чтобы базисные элементы были **линейно независимы**. Система элементов $\{x_1, \dots, x_n\}$ называется **линейно независимой**, если равенство $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \theta$ выполняется тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Линейной оболочкой n линейно независимых элементов $\{x_1, \dots, x_n\}$ называется множество $\{\dots y \dots\}$ из линейных комбинаций $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, a_i \in P$.

Линейное пространство E_n называется **n -мерным**, если оно представляет собой линейную оболочку n независимых элементов $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Линейное пространство E_∞ называется **бесконечномерным**, если в нем существуют системы из бесконечного числа линейно независимых векторов.

Как видим, пространства V_3, M_{22}, R_3 – конечномерные, пространство F_a бесконечномерное.

1.2. Линейное нормированное пространство

Часто в приложениях необходимо использовать понятие «близость» элементов. Если, например, мы хотим сравнить два сигнала $f(x)$ и $g(x)$, то как нам оценить, близки эти сигналы или не очень?

В повседневной жизни близость мы привыкли оценивать расстоянием между объектами. Если рассматриваемые объекты есть числа $f = \text{const}$, и $g = \text{const}$, то расстояние между точками f и g на числовой оси есть просто модуль разности $\rho = |f - g|$. Чем ближе f к g , тем меньше ρ . А как оценить близость между двумя функциями $f(x)$ и $g(x)$ (векторами \vec{x}, \vec{y} , матрицами A, B)? Что такое «близко» для этих объектов?

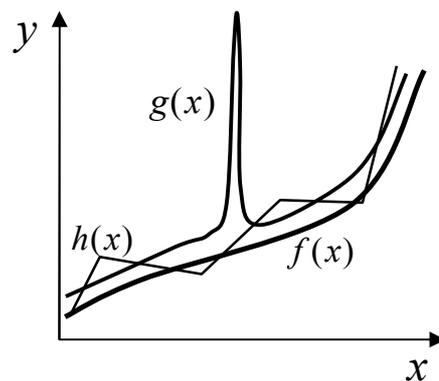


Рис. 1.1. Близость функций

Оказывается, в зависимости от выбранного класса функций (непрерывные, разрывные, но интегрируемые, дифференцируемые) близость может трактоваться по-разному. Например, две функции $f(x)$ и $g(x)$ или $f(x)$ и $h(x)$ на рис. 1.1 в одних инженерных задачах могут считаться близкими, а в других – нет. Ввиду этого должны быть предложены математические модели расстояний, различные для функций (матриц, векторов) из разных классов. Обычно при выполнении расчетов имеют дело с объектами, являющимися элементами некоторого нормированного пространства.

Нормированным называется такое линейное пространство, каждому элементу которого поставлено в соответствие число $\|x\|$ (норма x), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|x\| \geq 0$ норма (положительное число).
2. $\|x\| = 0$, только при $x = \theta$ (θ – нулевой элемент).
3. $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$, a число (может быть комплексным).
4. $\|x_1 \pm x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ неравенство треугольника.

Расстояние между элементами в нормированном пространстве определяется через норму:

$$\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|.$$

В зависимости от класса рассматриваемых объектов норма, а следовательно, и расстояние вводятся по-разному. Наиболее часто используются следующие нормированные пространства.

Пространство непрерывных функций $C[a, b]$ – множество непрерывных действительных функций $\{f(x), g(x), h(x), \dots\}$, определенных на интервале $[a, b]$.

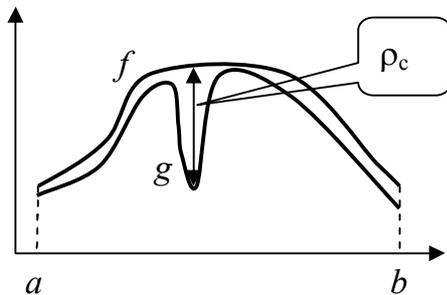


Рис. 1.2. Расстояние в C

Норма и расстояние в $C[a, b]$ определяются по формулам

$$\|f\|_C = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|; \quad \rho_C(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

На рис. 1.2 представлена геометрическая иллюстрация расстояния в пространстве $C[a, b]$.

Пространство интегрируемых с квадратом функций $L_2[a, b]$ – множество функций, для которых $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$.

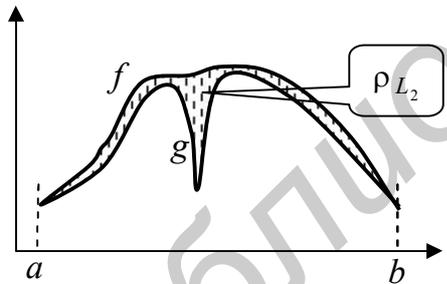


Рис. 1.3. Расстояние в L_2

В $L_2[a, b]$ имеются и разрывные функции, т. е. $C[a, b] \subseteq L_2[a, b]$.

Норма и расстояние в $L_2[a, b]$ (рис. 1.3):

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}; \quad \rho_{L_2}(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Заметим, что функции f и g на рис. 1.1 будут «близкими» в пространстве L_2 и «далекими» в пространстве C , т. е. норма в C более «сильная»:

$$\|f\|_{L_2} < \|f\|_C.$$

Пространство Соболева $W_2^s[a, b]$ – множество функций, имеющих интегрируемые с квадратом производные до s порядка. Норма определяется как

$\|f\|_{W_2^s}^2 = \sum_{m=0}^s \int_a^b \left(\frac{d^m f}{dx^m} \right)^2 dx$, расстояние $\rho_{W_2^s}^2 = \sum_{m=0}^s \int_a^b \left(\frac{d^m (f-g)}{dx^m} \right)^2 dx$. В этом пространстве близость между функциями характеризует также близость их производных. Например, функции f и h на рис. 1.1 будут «близкими» по норме $\| \cdot \|_{W_2^0}$ и «далекими» по норме $\| \cdot \|_{W_2^1}$, причем $\| \cdot \|_{W_2^0} = \| \cdot \|_{L_2}$.

Во множестве векторов $\{\vec{x}, \vec{y}, \dots\}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нормы также можно ввести по-разному: $\|\vec{x}\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$; $\|\vec{x}\|_c = \max_i |x_i|$.

Во множестве квадратных матриц наиболее употребительны следующие нормы (λ_i - собственные значения матрицы A):

$$\|A\|_c = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right); \quad \|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}; \quad \|A\|_\lambda = \sqrt{\max_i \lambda_i}.$$

Фундаментальной последовательностью элементов метрического пространства X называется такая бесконечная последовательность $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n, \dots\}$, для которой $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Любая фундаментальная последовательность x_n сходится при $n \rightarrow \infty$ к некоторому пределу.

Метрическое пространство X называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность элементов $x_i \in X$ сходится к пределу, являющемуся элементом пространства X .

Например, пространство $X = (0, \infty)$ с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ является неполным, т. к. последовательность $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, но нуль не принадлежит X . Если замкнуть это пространство, включив в него нулевой элемент, получим полное пространство $X = [0, \infty)$. Аналогично, множество рациональных чисел отрезка прямой является неполным, т. к. всегда найдется последовательность из рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному числу.

1.3. Унитарные пространства. Скалярное произведение и ортогональность

В обычном трехмерном векторном пространстве, описанном выше, для каждых двух векторов \vec{x}, \vec{y} **скалярное произведение** вводится как

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi.$$

Для каждого вектора, естественно, вводится его длина (норма): $\|\vec{x}\| = (\vec{x}, \vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и угол между векторами $\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$. Это про-

странство известно еще со времен Евклида (IV век до н. э.) и называется **евклидовым**.

Унитарное пространство – такое линейное пространство E , в котором скалярное произведение (x, y) вводится с помощью следующих аксиом:

- 1) $(x, y) = (y, x)^*$; число (знак * означает комплексное сопряжение).
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- 3) $(a \cdot x, y) = a \cdot (x, y)$; $\rightarrow (x, a \cdot y) = a^* \cdot (x, y)$; a – комплексное число;
- 4) $(x, x) > 0, \forall x \neq \theta$.

Унитарное пространство является **нормированным** с нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Для его элементов выполняется **неравенство Шварца**:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Унитарное пространство является обобщением евклидова пространства.

Приведем **примеры унитарных пространств**.

1. Многомерное векторное пространство со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n; \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

2. Пространство функций (в общем случае комплексных) $L_2[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g^*(x) dx, \quad \text{причем } \|f\|_{L_2}^2 = (f, f) = \int_a^b f(x) \cdot f^*(x) dx.$$

Одним из удивительных свойств унитарного пространства является наличие в нем ненулевых **ортогональных элементов**, для которых скалярное произведение равно нулю: $(x, y) = 0$.

Как известно, в трехмерном векторном пространстве ортогональные векторы составляют между собой угол 90° . В частности, **ортогональными** называются две функции $f(x)$ и $g(x)$ из L_2 , если $(f, g) = 0$.

Ортогональной системой называется счетное множество (конечное или бесконечное) элементов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots\} \in E$, если все они попарно ортогональны:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \|\varphi_j\|^2, & j = k. \end{cases}$$

Ортонормальной системой называется ортогональная система из элементов $\{e_1, \dots, e_j, \dots\}$, имеющих единичную норму: $\|e_j\| = 1$.

Легко заметить, что нормированные элементы получаются из ненормированных по формуле $e_j = \varphi_j / \|\varphi_j\|$.

Любое конечное число различных элементов ортогональной системы линейно независимо. Поэтому в унитарном пространстве ортогональные системы, как правило, выбирают в качестве **системы базисных функций** (базиса).

В полном унитарном пространстве любая функция может быть представлена в виде линейной комбинации элементов базиса (необязательно ортогонального).

Для любого элемента u унитарного пространства E число $a_k = (u, e_k) = (u, \varphi_k) / \|\varphi_k\|$ называется **коэффициентом Фурье** элемента u относительно ортонормальной системы $\{\dots e_k \dots\} = \{\dots, \varphi_k / \|\varphi_k\|, \dots\}$, а ряд

$$u = \sum_k a_k e_k = \sum_k a_k \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}$$

обобщенным **рядом Фурье** для элемента u . При этом выполняется равенство Бесселя: $(u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$, которое является **условием полноты** системы базисных функций.

Имеет место теорема о том, что отрезок ряда Фурье $u^N = \sum_{k=1}^N a_k e_k$ является **наилучшей аппроксимацией** элемента u в унитарном пространстве. То есть если искать коэффициенты a_k из условия $\min_{a_1 \dots a_N} \left\| u - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\|$, то они получаются как $a_k = (u, e_k)$.

Примеры систем ортогональных базисных функций.

1. В пространстве $L_2[-1, 1]$ кусочно-непрерывных функций с точками разрыва первого рода ортонормальным является базис:

$$\{1/\sqrt{2}, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots, \cos k\pi x, \sin k\pi x, \dots\}.$$

Свойства ортонормальности базиса:

$$(\sin k\pi x, \cos m\pi x) = \int_{-1}^1 \sin k\pi x \cdot \cos m\pi x dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (\sin k\pi x, \sin m\pi x) &= \int_{-1}^1 \sin k\pi x \cdot \sin m\pi x dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \\
 (\cos k\pi x, \cos m\pi x) &= \int_{-1}^1 \cos k\pi x \cdot \cos m\pi x dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Разложение функции $f \in L_2[-1, 1]$ в ряд Фурье по этому базису:

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x.$$

Коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx, \quad a_k = \int_{-1}^1 f(x) \cos k\pi x dx, \quad b_k = \int_{-1}^1 f(x) \sin k\pi x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Базис из ортогональных многочленов Лежандра, $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
 &\{L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_4(x), \dots, L_k(x), \dots\} = \\
 &= \{L_0 = 1, L_1 = x, L_2 = (3x^2 - 1)/2, L_3 = (5x^3 - 3x)/2, L_4 = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \dots\}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Формула Родрига: } L_{k+1} = \frac{1}{k+1} [(2k+1)x L_k - k L_{k-1}].$$

$$(L_k, L_m) = \int_{-1}^1 L_k(x) \cdot L_m(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 2/(2k+1), & k = m. \end{cases}$$

$$\text{Обобщенный ряд Фурье: } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(x).$$

$$\text{Обобщенные коэффициенты Фурье: } a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx.$$

Вопросы и задания для проверки

1. Что такое линейная оболочка и как вводится базис в линейном пространстве?
2. Как определяется размерность линейного пространства?
3. Как вводятся норма и расстояние между элементами, и как определяется полнота метрического пространства?
4. Как определяются нормированные пространства $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$?
5. Дайте определение унитарного пространства, как определяется скалярное произведение в $L_2[a, b]$, какие элементы называются ортогональными?
6. Что такое обобщенный ряд Фурье и коэффициенты Фурье в $L_2[a, b]$?

Лекция 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций

2.1.1. Классическая форма ряда Фурье

Француз Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830), участвовавший в военных походах Наполеона, а позже, разочаровавшийся в войнах, заинтересовался естественными науками: физикой и математикой. Занимаясь изучением законов распространения тепла (1822 г.), установил знаменитый закон теплопроводности (закон Фурье). В математике первым обратил внимание на *ортogonalность тригонометрической системы функций*:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots\}$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$ и получил разложение функции в тригонометрический ряд (ряд Фурье):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx; \quad (2.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Заметим, что если не ограничиваться отрезком $[-\pi, \pi]$, а рассматривать ряд Фурье на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, то он представляет периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , т. е. $f(x) = f(x + 2\pi)$. При этом, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв первого рода, то в этой точке ряд Фурье сходится к среднему значению функции:

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0.$$

Если функция четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то она может быть представлена в ряд только по косинусам. Если функция нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то она может быть представлена в ряд только по синусам, и коэффициент a_0 равен нулю.

Если $\bar{f}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \neq 0$, но функция $f(x) - \bar{f}(x)$ является нечетной, то $f(x)$

может быть представлена в ряд только по синусам, причем коэффициент a_0 не равен нулю.

В приложениях к теории сигналов иногда удобным является представле-

ние периодического сигнала в виде $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cos(kx + \varphi_k)$.

В этом случае $s_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ – амплитуда; $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}$ – фаза.

2.1.2. Комплексная форма ряда Фурье

Во многих приложениях используются разложения в ряд комплексных функций. В этом случае используют ряд Фурье в показательной форме (здесь $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица):

$$f(x) = f_r(x) + if_i(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (c_k = c_{rk} + ic_{ik} \text{ – комплексное}). \quad (2.2)$$

При этом используется тот факт, что на интервале $[-\pi, \pi]$ система комплексных функций $\{\dots, e^{ikx}, \dots\}$ является ортогональной, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \cdot (e^{imx})^* dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \cdot e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 2\pi, & k = m. \end{cases}$$

Поэтому, умножая ряд (2.2) на функции e^{-imx} , $m = -\infty \dots \infty$ и интегрируя по интервалу $[-\pi, \pi]$, получим

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Установим переход от комплексной к обычной форме ряда Фурье для действительной функции, т. е. $f = f_r$. Для этого возьмем действительную и мнимую часть от (2.2):

$$f_r(x) = \operatorname{real} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right) = \operatorname{real} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{rk} + ic_{ik})(\cos kx + i \sin kx) \right) = f(x);$$

$$f_i(x) = \operatorname{imag} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right) = \operatorname{imag} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{rk} + ic_{ik})(\cos kx + i \sin kx) \right) = 0.$$

Преобразуем суммы к положительному индексу:

$$c_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_{r,-k} + c_{r,k}) \cos kx + (c_{i,-k} - c_{ik}) \sin kx] = f(x);$$

$$c_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_{r,k} - c_{r,-k}) \cos kx + (c_{i,-k} + c_{ik}) \sin kx] = 0.$$

Из второго уравнения получаем $c_{i0} = 0$; $c_{r,k} = c_{r,-k}$; $c_{i,k} = -c_{i,-k}$.

Сравнивая коэффициенты первого уравнения и уравнения (6.1), имеем

$$a_0 = 2c_{r0}; \quad a_k = c_{r,-k} + c_{r,k} = 2c_{rk}; \quad b_k = -2c_{ik}; \quad \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k|.$$

Таким образом мы установили, что для действительной функции $f(x)$, получив комплексную форму ряда Фурье, достаточно от нее взять действительную часть, привести подобные члены, и получится классический тригонометрический ряд Фурье.

2.1.3. Ряд Фурье для функции с заданным периодом

В теории сигналов имеется очень важный класс периодических сигналов $f(t)$ с определенным периодом T и соответствующей ему циклической частотой $\omega=2\pi/T$. Возникает вопрос, а как представить периодическую функцию с периодом T и частотой ω в виде ряда Фурье?

Сделаем в формуле (2.2) замену переменной $x = 2\pi t/T$, при которой интервал $x \in [-\pi, \pi]$ переходит в интервал $t \in [-T/2, T/2]$. В результате получаем

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (2.3)$$

Система функций $\{\dots, e^{ik\omega t}, \dots\}$ является ортогональной на интервале $[-T/2, T/2]$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t} \cdot (e^{im\omega t})^* dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t} \cdot e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T, & k = m \end{cases}.$$

Поэтому коэффициенты c_k вычисляются следующим образом:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

От комплексного представления можно теперь перейти к тригонометрическому ряду, взяв реальную его часть:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t; \quad (2.4)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt.$$

Для периодических сигналов $f(t)$ распределение модуля $c_k(k\omega)$, $k = 0, 1, \dots$ называется **амплитудным спектром**.

В качестве примера рассмотрим широко используемый на практике периодический импульсный сигнал:

$$f(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [(k-1/4)T, (k+1/4)T] \\ 0, & t \in [(k+1/4)T, (k+3/4)T] \end{cases}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Период сигнала равен T , амплитуда равна 0.5 (рис. 2.1). Получим коэффициенты разложения этого сигнала в ряде Фурье (2.3):

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 0.5 e^{-ik\omega t} dt = \frac{0.5}{T} \frac{e^{-ik\omega t} \Big|_{-T/4}^{T/4}}{-ik\omega} =$$

$$= \frac{1}{Tk\omega} \frac{e^{ik\omega T/4} - e^{-ik\omega T/4}}{2i} = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ввиду того, что сигнал действительный, его коэффициенты разложения в тригонометрический ряд (2.1) выражаются через c_k : $a_0 = 2c_0 = 2$; $a_k = 2c_k$; $b_k = 0$.

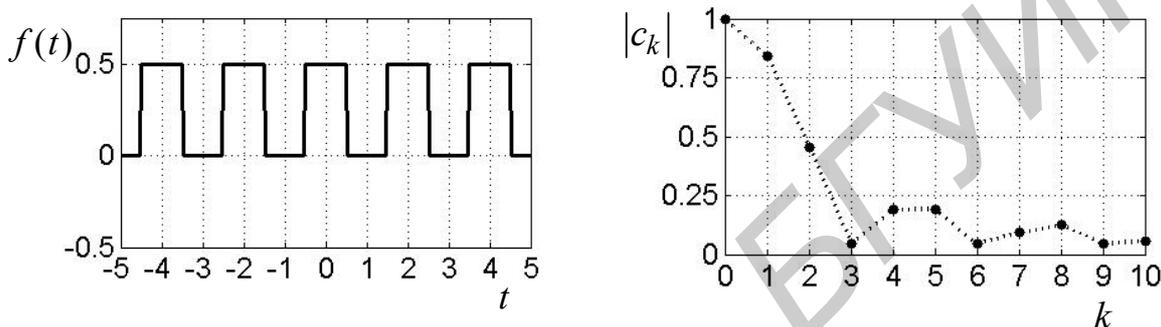


Рис. 2.1. Периодический импульсный сигнал ($T = 2$) и его спектр амплитуд

2.2. Интегральное преобразование Фурье

2.2.1. Переход от ряда Фурье к преобразованию Фурье

Представление (2.3) показывает, что периодическая функция разлагается в ряд по гармоникам частоты $\omega_k = k\omega$, кратной некой минимальной частоте, соответствующей максимальному периоду $\omega = 2\pi/T$.

А если функция непериодическая? Тогда ее можно представить как предел периодической функции, у которой период стремится к бесконечности.

При увеличении периода $T \rightarrow \infty$ фундаментальная частота $\omega \rightarrow 0$, соседние гармоники сближаются. Запишем ряд (2.3) в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k) e^{i\omega_k t}; \quad c(\omega_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

В пределе при $T \rightarrow \infty$, как показал Фурье, после подстановки выражения для коэффициента $c(\omega_k)$ (в котором под интегралом t заменим на σ), ряд

$$\sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k) e^{i\omega_k t} = \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\sigma) e^{-i\omega_k \sigma} d\sigma \right] e^{i\omega_k t}$$

представляет интегральную сумму, которая стремится к интегралу с бесконечными пределами. При этом дискретная переменная ω_k стремится к непрерывной, которую обозначим ω .

В результате такого предельного перехода была получена **интегральная формула Фурье**:

$$f(t) = \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k) e^{i\omega_k t} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{i\omega(t-\sigma)} d\sigma \right] d\omega.$$

Запишем эту формулу в следующем виде:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-i\omega\sigma} d\sigma \right] e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.5)$$

Обозначим интеграл в квадратных скобках через $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) получило название **преобразование Фурье**. Подставив $F(\omega)$ в квадратные скобки выражения (2.5), получим **обратное преобразование Фурье**:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.7)$$

В теории сигналов для сигнала $f(t)$ его преобразование Фурье $F(\omega)$ называется спектральной функцией, или **спектром**, а выражение (2.7) есть разложение сигнала по непрерывному спектру гармоник, т. е. $F(\omega)$ амплитуда гармоники на частоте ω . На рис. 2.2, 2.3 приведены примеры сигналов и их спектров.

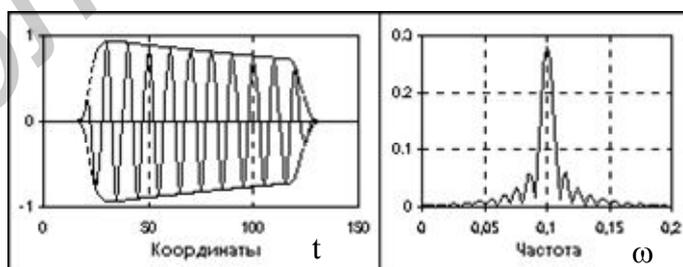


Рис. 2.2. Радиоимпульс и его модуль спектра

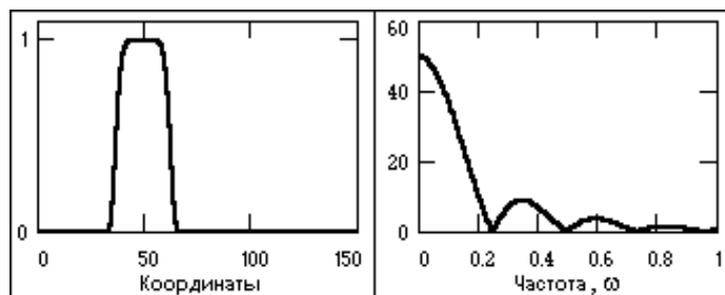


Рис. 2.3. Импульсный сигнал и модуль спектра

Фактически преобразование Фурье представляет собой отображение, которое каждой функции $f(t)$ из некоторого пространства функций ставит в соответствие функцию $F(\omega)$ из другого пространства. Такое отображение принято называть **оператором**. Для оператора преобразования Фурье будем использовать краткое обозначение $Vf(t)=F(\omega)$, $V^{-1}F(\omega)=f(t)$.

2.2.2. Свойства преобразования Фурье

Итак, преобразование Фурье (2.6) представляет интегральный оператор $Vf(t) = F(\omega)$, отображающий пространство функций $\{...f(t)...\}$ на пространство функций $\{...F(\omega)...\}$. Не вдаваясь глубоко в теорию того, на каких классах функций этот оператор определен, ограничимся наиболее часто используемым на практике предположением, что функции $f(t)$ принадлежат пространству $L_2[-\infty, \infty]$, в общем случае комплексному. Тогда для каждой $f(t) \in L_2[-\infty, \infty]$ существует $Vf(t) = F(\omega) \in L_2[-\infty, \infty]$, а следовательно, существует и обратное преобразование (2.7).

Свойства преобразования Фурье

№ п/п	Свойства	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
1	2	3	4
1	Дуальность	$F(t)$	$f(-\omega)$
2	Четность	$f(-t) = f(t)$	$F(-\omega) = F(\omega)$
3	Нечетность	$f(-t) = -f(t)$	$F(-\omega) = -F(\omega)$
4	Линейность	$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$	$a_1F_1(\omega) + a_2F_2(\omega)$
5	Изменение масштаба	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } F(\omega/\alpha)$
6	Сдвиг аргумента	$f(t - \tau)$	$e^{-i\omega\tau} F(\omega)$
7	Умножение на гармонику	$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$

1	2	3	4
8	Свертка	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = f * g$	$\sqrt{2\pi} F(\omega)G(\omega)$
9	Произведение	$\sqrt{2\pi} f(t)g(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)G(\omega-\sigma)d\sigma = F * G$
10	Дифференцирование	$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$
11	Интегрирование	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(\omega)}{i\omega}$
12	Скалярное произведение, формула Рэлея	$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = (F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega$	
13	Формула Парсеваля	$\ f\ = (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt =$ $\ F\ = (F, F) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega$	

Прокомментируем доказательства свойств 1, 6, 7, 10.

1. Дуальность. Если заданы $f(t)$ и его преобразование Фурье $F(\omega)$, то чему будет равно преобразование Фурье от $F(t)$?

Используя формулу обратного преобразования, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i(-\omega)t} dt = f(-\omega).$$

Таким образом, $V F(t) = f(-\omega)$.

6. Сдвиг аргумента: $V f(t-\tau) = e^{-i\omega\tau} F(\omega)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega t} dt &= \left| \begin{array}{l} \text{replacement variables} \\ \sigma = t - \tau; dt = d\sigma \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)e^{-i\omega(\sigma+\tau)} d\sigma = \\ &= \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)e^{-i\omega\sigma} d\sigma = e^{-i\omega\tau} F(\omega). \end{aligned}$$

Как следствие, используя свойство дуальности, получаем

$$V \left[e^{-it\tau} f(t) \right] = F(\omega + \tau).$$

7. Умножение на гармонику: $V [e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$.

Это свойство получается непосредственно из следствия свойства 6, в котором $\tau = -\omega_0$. Можно также его вывести непосредственным интегрированием:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0).$$

10. Дифференцирование: $V f'(t) = i\omega F(\omega)$.

Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} df(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d e^{-i\omega t} = \\ &= 0 + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega). \end{aligned}$$

2.2.3. Спектральные функции для некоторых сигналов

Пример 1. Функция Дирака $\delta(t)$

Рассмотрим функцию Гаусса плотности вероятности нормального закона

$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. Эта функция обладает интересным свойством – площадь

под ней равна единице при любом значении $\sigma > 0$, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$. Ее график

представлен на рис. 2.4. При $\sigma \rightarrow 0$ высота этой функции стремится к бесконечности и практически везде, кроме точки $t = 0$, где она равна нулю, причем площадь под ней остается равной единице.

Предельную функцию формально можно записать в виде:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \text{ при этом}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

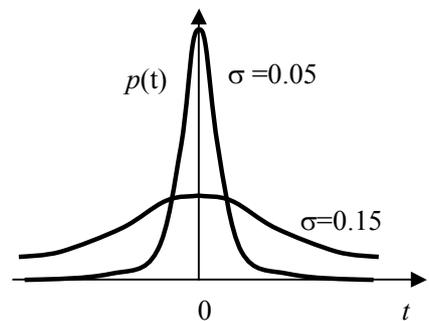


Рис. 2.4. Функция Гаусса

Несмотря на свою кажущуюся примитивность, она является очень полезной как в математической физике, так и в теории сигналов.

Одно из важнейших свойств этой функции записывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = f(0).$$

Его следствие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (2.8)$$

Таким образом, интегральный оператор (2.8) каждой функции $f(x)$ ставит в соответствии число, равное значению функции в точке t_0 .

Вторым важным свойством является ее дифференцируемость. Производная от функции Дирака $\delta'(t)$ определяется ее свойством, т. е. определяется через линейный функционал:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0).$$

Спектр δ -функции. Предположим, что сигнал описывается функцией Дирака $s(t) = \delta(t)$, и найдем его спектр, т. е. найдем преобразование Фурье от нее.

$$V\delta(t) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega 0}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Согласно свойствам дуальности и четности: $V \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] = \delta(\omega)$.

Таким образом, спектр (Фурье-образ) δ -функции является просто константой, т. е. амплитуда гармоник в ее представлении не зависит от частоты:

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega.$$

Такой сигнал получил название «**белый шум**», и он является идеальным подавителем других сигналов. Его мощность равна бесконечности, что следует из формулы Парсеваля:

$$\|F\|^2 = (F, F) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\omega = \infty.$$

На практике он конечно нереализуем, но можно к нему приблизиться с помощью функции Гаусса с малым σ .

Пример 2. Спектр гармонического сигнала: $s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega_0 t}$.

Представим наш сигнал в виде произведения постоянного сигнала $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, спектральная функция которого равна $\delta(\omega)$, и гармонического $s(t) = e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Воспользуемся свойством 7 табл. 2.1, получим

$$V s(t) = V \left[e^{i\omega_0 t} f(t) \right] = \delta(\omega - \omega_0).$$

По свойству дуальности $V \delta(t - \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega_0 \omega}$, т. е. Фурье преобразование импульсной функции представляет гармоническую функцию частоты.

Пример 3. Спектр периодического сигнала: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t}$.

$$V f(t) = V \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k V \left[e^{i \frac{2\pi k}{T} t} \right] = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) = F(\omega).$$

Таким образом, преобразование Фурье периодического сигнала представляет собой импульсную последовательность в частотной области. По свойству дуальности преобразование Фурье импульсной последовательности во временной области будет давать периодическую функцию частоты.

Пример 4. Спектр видеоимпульса $f(t) = \begin{cases} 1/L, & t \leq L/2, \\ 0, & t > L/2, \end{cases}$ имеющего дли-

тельность L и единичную площадь.

Вычисляем преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{L} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\omega L} e^{-i\omega t} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega L/2} - e^{i\omega L/2}}{-i\omega L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega L/2)}{\omega L/2}. \end{aligned}$$

Максимальное значение $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, нули $F(\pm 2\pi k / L) = 0$ и ширина основного максимума: $0 \leq \omega \leq 2\pi / L$ спектральной функции.

На рис. 2.5 приведен вариант видеоимпульса, на рис. 2.6 – его спектр.

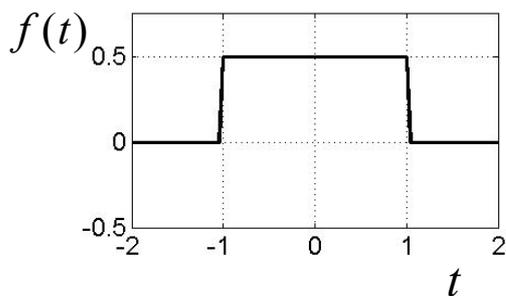


Рис. 2.5. Видеоимпульс: $L = 2$

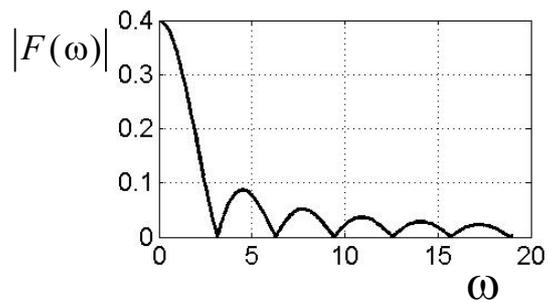


Рис. 2.6. Спектр видеоимпульса

Пример 5. Спектр радиоимпульса $f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t}/L, & t \leq L/2, \\ 0, & t > L/2. \end{cases}$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{i\omega_0 t}}{L} \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{L} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)t}}{i(\omega - \omega_0)L} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)L/2} - e^{i(\omega - \omega_0)L/2}}{i(\omega - \omega_0)L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin[(\omega - \omega_0)L/2]}{(\omega - \omega_0)L/2}.$$

$F(\omega_0 \pm 2\pi k/L) = 0$, основной максимум: $\omega_0 - 2\pi/L \leq \omega \leq \omega_0 + 2\pi/L$.

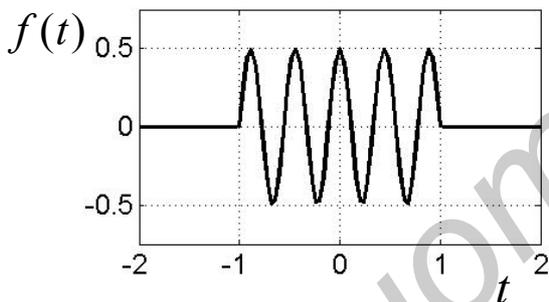


Рис. 2.7. Радиоимпульс: $\omega_0 = 4.5\pi$, $L = 2$

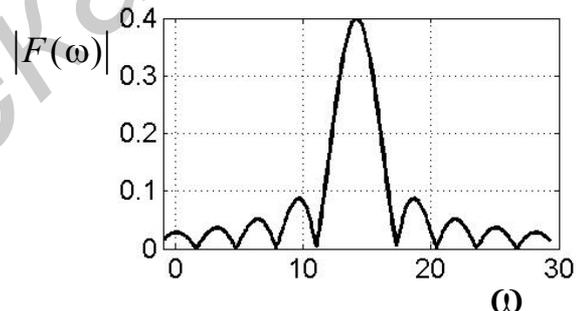


Рис. 2.8. Спектр радиоимпульса

Вопросы и задания для проверки

1. Как связаны коэффициенты рядов Фурье в классической и комплексной формах?
2. Как записывается ряд Фурье для функции с заданным периодом T ?
3. Что такое амплитудный спектр периодического сигнала?
4. Как производится предельный переход к преобразованию Фурье?
5. Какие свойства преобразования Фурье вы знаете?
6. Что такое δ -функция и какой у нее спектр?
7. Нарисуйте графики видеоимпульса, радиоимпульса и их спектральные функции.

Лекция 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

3.1. Линейные операторы

Пусть даны два линейных пространства U и F . Говорят, что **оператор L** , ставящий каждому элементу $u \in U$ некоторый элемент $f \in F$

$$L u = f$$

осуществляет **линейное отображение** пространства U на пространство F , если выполнены следующие условия:

1. $L(au) = aLu$ для $\forall a \in P$ (P – поле чисел);
2. $L(u_1+u_2) = Lu_1+Lu_2$ для $\forall u_1, u_2 \in U$.

U называется областью определения, F – областью значений оператора.

Из определения следует, что линейный оператор от линейной комбинации элементов равен линейной комбинации операторов от каждого элемента:

$$L(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) = a_1Lu_1 + a_2Lu_2 + \dots + a_nLu_n.$$

Если на множестве линейных операторов $V = \{L_1, \dots, L_n, \dots\}$, отображающих пространство U на пространство F ввести операцию сложения:

$$L_\Sigma = L_1 + L_2 \in V,$$

то множество V само является линейным пространством, на котором может быть введена норма (норма оператора $\|L\|$).

Линейным функционалом называется линейный оператор Φ , отображающий линейное пространство U на множество чисел P .

$$\Phi u = p, \quad p \in P.$$

Линейные операторы в конечномерном пространстве.

Если пространства $X = X_n$, $Y = Y_m$ – векторные размерности n и m , то линейный оператор представляет собой матрицу A размерностью $m \times n$ – $A\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Норма оператора в этом случае представляет собой норму матрицы.

Приведем примеры линейных операторов в функциональных пространствах.

1. Обыкновенный линейный дифференциальный оператор:

$$Ly(x) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

отображает пространство n раз дифференцируемых функций Y^n в пространство функций F .

2. Линейный функционал Φ :

$$\Phi y(x) = \int_a^b y^2(x) dx = p$$

отображает множество интегрируемых с квадратом функций $y \in L_2$ в множество чисел $p \in P$.

3. Линейные интегральные операторы J :

$$Jy(t) = \int_a^b K(x, t)y(t)dt = f(x); \quad Jy(t) = \int_0^x K(t)y(t)dt = f(x)$$

отображают множество интегрируемых функций из Y на множество функций F .

4. Оператор градиента от скалярной функции трех переменных $u(x, y, z)$:

$$\text{grad } u(x, y, z) = \nabla u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{x}_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{y}_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{z}_0 = \vec{v}(x, y, z),$$

отображает множество дифференцируемых функций на множество векторных функций:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x(x, y, z)\vec{x}_0 + v_y(x, y, z)\vec{y}_0 + v_z(x, y, z)\vec{z}_0.$$

$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ – единичные орты декартовой системы координат.

5. Оператор дивергенции от векторной функции $\vec{v}(x, y, z)$:

$$\text{div } \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = u(x, y, z)$$

отображает множество дифференцируемых векторных функций на множество скалярных функций.

6. Оператор ротор от векторной функции $\vec{v}(x, y, z)$:

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{x}_0 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{y}_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{z}_0 = \vec{w}(x, y, z)$$

отображает множество дифференцируемых векторных функций на множество векторных функций.

7. Оператор лапласиан от скалярной функции $u(x, y, z)$

$$\nabla^2 u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = q(x, y, z)$$

отображает множество скалярных дважды дифференцируемых функций на множество скалярных функций.

3.2. Операторные задачи в линейных пространствах и общие методы их решения

Обычно на практике встречаются следующие задачи.

I. $Lu = f$ задача об отыскании корня $u^* \in E$ уравнения (E – область определения, $f \in R$, R – область значений оператора L).

II. $Lu = u$ задача о неподвижной точке $u^* \in E$, $u^* \neq \theta$ оператора L .

III. $Lu = \lambda u$ $\lambda \in P$, задача о собственных значениях λ^* и собственных функциях $u_\lambda \in E$, $u_\lambda \neq \theta$ оператора L .

IV. $\min(\Phi u)$ задача вариационного исчисления о нахождении элемента $u^* \in E$ доставляющего минимум функционала Φ .

Задачи II, III являются частными случаями задачи I. Действительно, если ввести понятие тождественного (единичного) оператора $Iu = u$, тогда задача II сводится к задаче $(L-I)u = 0$; а задача III к задаче $(L-\lambda I)u = 0$.

В задаче III о собственных значениях находят такие значения λ^* параметра λ , так называемые **собственные значения**, для которых существуют ненулевые элементы $u_\lambda \neq \theta$, удовлетворяющие уравнению III.

3.2.1. Итерационный метод

Рассмотрим задачу I:

$$Lu = f. \quad (3.1)$$

Обозначим через u^* точное решение поставленной задачи (u^* может быть числом, вектором, функцией).

Итерационные методы основаны на построении сходящейся к точному решению u^* бесконечной рекуррентной последовательности $u^0, u^1, \dots, u^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u^*$ элементов той же природы, что и u^* (числа, векторы, функции).

Последовательность называется **рекуррентной** порядка m , если каждый следующий ее член выражается через m предыдущих по некоторому правилу II (алгоритму):

$$u^k = \Pi(u^{k-1}, u^{k-2}, \dots, u^{k-m}). \quad (3.2)$$

Соответствующий итерационный метод называется *m-шаговым*. Для реализации *m*-шагового метода требуется задать *m* первых членов $\{u^0, u^1, \dots, u^{m-1}\}$, называемых *начальным приближением*. Зная начальное приближение, по формуле (3.2) последовательно находят $u^m, u^{m+1}, \dots, u^k, \dots$

Процесс получения следующего *k*-го члена через предыдущие называется *k*-й *итерацией*. Итерации выполняются до тех пор, пока очередной член u^k не будет удовлетворять заданной точности, т. е. $\|u^k - u^*\| < \delta$. Ввиду того, что точное решение u^* заранее неизвестно, обычно сходимость метода определяют по близости двух последних членов, т. е. расчеты производят до тех пор, пока не выполнится условие $\|u^k - u^{k-1}\| < \varepsilon$, где ε – некоторая заданная малая величина. В качестве искомого решения берут последний член последовательности u^k , при котором выполнилось указанное неравенство.

Простой итерационный метод для решения задачи (3.1) строится следующим образом.

Преобразуем задачу (3.1) к виду, разрешенному относительно неизвестного u . Это можно сделать бесконечным набором способов, чем и определяется многообразие итерационных методов. Например, можно преобразовать так:

$$u = u + \alpha(Lu - f) = \Pi u. \quad (3.3)$$

При этом точное решение (3.1) является и решением (3.3). Здесь α – произвольный параметр, который подбирается из условия сходимости итераций.

Используем выражение (3.3) в качестве рекуррентной формулы ($m = 1$):

$$u^k = \Pi u^{k-1}.$$

Задав одно u^0 (начальное приближение), последовательно находим u^1 , затем u^2, \dots, u^k . Если полученная таким образом последовательность сходится к некоторому конечному пределу, то этот предел совпадает с точным решением u^* .

Условие сходимости последовательности, задаваемой рекуррентной формулой определяется выполнением неравенства:

$$\|d\Pi/du\| < 1.$$

Чем ближе $\|d\Pi/du\|$ к нулю, тем быстрее сходится рекуррентная последовательность к точному решению и, следовательно, для получения решения с заданной точностью требуется меньше итераций.

3.2.2. Проекционный метод

Рассмотрим опять задачу I (3.1): $Lu = f$.

Выберем в области определения U оператора L систему из первых N базисных элементов (необязательно ортогональную) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$. Из условия полноты следует, что любой элемент $u \in U$ может быть получен в виде

$$u = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k.$$

Будем искать решение (3.1) в виде (φ_k известны, a_k – неизвестны)

$$u^N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k. \quad (3.4)$$

Подставим (3.4) в уравнение (3.1) и умножим скалярно на функцию $\varphi_j, j = 1 \dots N$, получим так называемую *систему проекционных уравнений* вида

$$\left(L \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k, \varphi_j \right) = (f, \varphi_j); \quad j = 1 \dots N.$$

Воспользуемся линейностью оператора L и преобразуем эту систему к стандартной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N (L\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j); \quad j = 1 \dots N. \quad (3.5)$$

Матрица системы $G = [g_{jk}]$; $g_{jk} = (L\varphi_k, \varphi_j)$, вектор правых частей $d_j = (f, \varphi_j)$. Решая систему линейных уравнений $G\vec{a} = \vec{d}$, получаем искомый вектор коэффициентов $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$ в представлении (3.4).

Таким образом, применение проекционного метода сводит решение функциональной задачи (дифференциальной, интегральной) к решению системы линейных алгебраических уравнений.

3.3. Задачи линейной алгебры

Выделяют четыре основные задачи линейной алгебры: решение СЛАУ, вычисление определителя матрицы, нахождение обратной матрицы, определение собственных значений и собственных векторов матрицы.

3.3.1. Вычисление определителя матрицы

Одной из важных характеристик квадратной матрицы является ее определитель, это число, которое обозначается как $\det A$. Отличие от нуля определителя $\det A \neq 0$ соответствует тому факту, что все строки (столбцы) матрицы, интерпретируемые как векторы являются линейно независимыми.

Определитель $\det A$ матрицы $A(n) = [a_{ij}]$ размером $n \times n$ вводится следующим образом.

Назовем дополнением элемента a_{1j} подматрицу $A_j(n-1)$ размера $n-1$, получаемую из исходной вычеркиванием 1-й строки и j -го столбца.

Тогда рекуррентный алгоритм нахождения определителя записывается в виде:

1. $\det A(1) = \det [a_{11}] = a_{11}$.
2. $\det A(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_{1j} \det A_j(n-1)$.

Например, определитель матрицы второго порядка

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det [a_{22}] + (-1)^1 a_{12} \cdot \det [a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель $A(3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \det A(3) &= \\ &= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^1 a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^2 \cdot a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Например, вычислим определитель матрицы $A(3) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det A(3) &= (-1)^0 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^1 (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= 2(-5 + 8) + 2(-3 - 28) + 1(6 + 35) = -15. \end{aligned}$$

Для больших размерностей матрицы приведенный алгоритм требует значительных вычислительных затрат. Ниже будет приведен эффективный алгоритм Гаусса для нахождения определителя.

3.3.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Задача отыскания решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными – одна из наиболее часто встречающихся в практике вычислительных задач, так как большинство методов решения сложных задач основано на сведении их к решению некоторой последовательности СЛАУ.

Для матричного оператора A задача I формулируется как $A\vec{x} = \vec{b}$ или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i ; 1 \leq i \leq n ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} . \quad (3.6)$$

Здесь A и \vec{b} заданы, требуется найти \vec{x}^* , удовлетворяющий (3.6).

Известно, что если определитель матрицы $\det A \neq 0$, то СЛАУ имеет единственное решение. В противном случае либо решение отсутствует (если $\vec{b} \neq 0$), либо имеется бесконечное множество решений (если $\vec{b} = 0$). При решении систем, кроме условия $\det A \neq 0$, важно чтобы задача была **корректной**, т. е. чтобы при малых погрешностях правой части $\Delta \vec{b}$ и (или) коэффициентов $\Delta a_{i,j}$ погрешность решения $\Delta \vec{x}^*$ также оставалась малой. Признаком некорректности, или плохой обусловленности, является близость к нулю определителя матрицы.

Каждое из уравнений (3.6) описывает прямую линию в системе координат (x_1, \dots, x_n) . Плохо обусловленная система двух уравнений геометрически соответствует почти параллельным прямым (рис. 3.1).

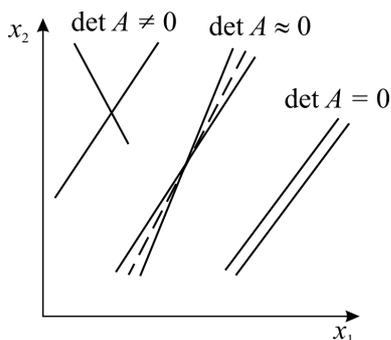


Рис. 3.1. Устойчивость СЛАУ

Точка пересечения таких прямых (решение) при малейшей погрешности коэффициентов резко сдвигается. Обусловленность (корректность) СЛАУ характеризуется числом $\chi = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$. Чем дальше χ от 1, тем хуже обусловлена система. Обычно при $\chi > 10^3$ система некорректна и требует специальных методов решения – методов регуляризации. Приведенные ниже методы применимы

только для корректных систем.

Методы решения СЛАУ делятся на *прямые* и *итерационные*.

Прямые методы дают в принципе точное решение за конечное число арифметических операций (если не учитывать ошибок округления). Для решения хорошо обусловленных СЛАУ применение прямых методов требует меньших вычислительных затрат по сравнению с итерационными, однако при этом требуется больше оперативной памяти.

Наибольшее распространение среди прямых методов получили **метод Гаусса** для СЛАУ общего вида, его модификация для трехдиагональной матрицы – **метод прогонки** и **метод квадратного корня** для СЛАУ с симметричной матрицей. Среди итерационных чаще используются **метод простой итерации** и его модификация – **метод Зейделя**.

3.3.3. Метод Гаусса

Метод основан на приведении исходной СЛАУ с произвольной матрицей (3.6), с помощью преобразований, не меняющих решение, к СЛАУ с верхней треугольной матрицей вида

$$\begin{aligned} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,n}x_n &= b'_1 \\ a'_{2,2}x_2 + \dots + a'_{2,n}x_n &= b'_2 \\ \dots & \dots \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n,n}x_n &= b'_{n-1} \\ a'_{n,n}x_n &= b'_n \end{aligned} \quad (3.7)$$

Этап приведения к системе с треугольной матрицей называется **прямым ходом метода Гаусса**.

Решение системы с верхней треугольной матрицей (3.7), как легко видеть, находится по формулам, называемым **обратным ходом метода Гаусса**:

$$x_n = b'_n / a'_{n,n}; \quad x_k = \frac{1}{a'_{k,k}} \left[b'_k - \sum_{i=k+1}^n a'_{k,i} x_i \right], \quad k = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (3.8)$$

Сначала из последнего уравнения (3.7) находится x_n , затем, зная x_n , из предпоследнего находится x_{n-1} и т. д.

Прямой ход метода Гаусса осуществляется следующим образом: вычтем из каждого m -го уравнения ($m = 2 \dots n$) первое уравнение, умноженное на $a_{m,1}/a_{1,1}$, и вместо m -го уравнения оставим полученное. В результате в матрице системы исключаются все коэффициенты первого столбца ниже диагонального. Затем, используя второе полученное уравнение, аналогично исключим элементы второго столбца ($m = 3 \dots n$) ниже диагонального и т. д. Такое исключение называется **циклом метода Гаусса**. Прodelывая последовательно эту операцию с расположенными ниже k -го уравнениями ($k = 1, 2, \dots, n-1$), приходим к системе вида (3.7). При указанных операциях решение СЛАУ не изменяется.

На каждом k -м шаге преобразований прямого хода элементы матриц изменяются по **формулам прямого хода метода Гаусса**:

$$\begin{aligned} a_{m,i} &= a_{m,i} - a_{k,i} \frac{a_{m,k}}{a_{k,k}}, & k = 1, n-1, \quad i = k, n; \\ b_m &= b_m - b_k \frac{a_{m,k}}{a_{k,k}}, & m = k+1, n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Элементы $a_{k,k}$ называются *главными*. Заметим, что если в ходе расчетов по данному алгоритму на главной диагонали окажется нулевой элемент $a_{k,k} = 0$, то произойдет сбой в ЭВМ. Чтобы этого избежать, следует каждый цикл по k начинать с перестановки строк: среди элементов k -го столбца $a_{m,k}$, $k \leq m \leq n$ находят номер p главного, т. е. наибольшего по модулю, и меняют местами строки k и p . Такой выбор главного элемента значительно повышает устойчивость алгоритма к ошибкам округления, т. к. в формулах (3.9) при этом производится умножение на числа $a_{m,k} / a_{k,k}$ меньшие единицы, и ошибка, возникшая ранее, уменьшается.

Проиллюстрируем метод Гаусса на решении СЛАУ 3-го порядка:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 14 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \\ -I \times 2 \\ -I \times 3. \end{array} \right.$$

Первый цикл: вычтем из второго уравнения первое, умноженное на $a_{2,1}/a_{1,1} = 2$, а из третьего – первое, умноженное на $a_{3,1}/a_{1,1} = 3$; получим

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 0 \quad 4x_2 + 4x_3 = 4 \\ 0 \quad 2x_2 + 11x_3 = 11 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \\ \\ -II \times 0.5. \end{array} \right.$$

Второй цикл: вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на $a_{3,2}/a_{2,2} = 0,5$; получим систему с треугольной матрицей вида

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \quad 4x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad \quad 0 \quad 9x_3 = 9. \end{array}$$

Обратный ход: из последнего уравнения находим $x_3 = 1$, подставляя во второе, находим $x_2 = 0$, подставляя в первое, находим $x_1 = 1$.

Таким образом, получен вектор решения $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 0, 1)$.

Определитель матрицы ($\det A$) не изменяется при вышеприведенных преобразованиях прямого хода метода Гаусса, однако изменяется его знак.

Как известно, определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Для нашего примера $\det A = 2 \times 4 \times 9 = 72$.

3.3.4. Решение задачи на собственные значения

Рассмотрим задачу III с матричным оператором A :

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \quad (3.10)$$

Значения λ , \vec{x}_λ , при которых выполняется (3.10), называются собственным значением и соответствующим ему собственным вектором матрицы A . Множество всех собственных значений называется **спектром матрицы A** .

Система $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ является однородной (здесь I – единичная матрица), и следовательно имеет ненулевое решение только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель представляет собой многочлен степени n относительно λ , который называется *характеристическим*. Соответствующее характеристическое уравнение получается после приведения подобных членов и имеет стандартный вид:

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n = 0. \quad (3.11)$$

Характеристическое уравнение (3.11) имеет n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, среди которых могут быть одинаковые (кратные). Эти корни и являются собственными значениями матрицы.

Для нахождения собственных векторов требуется при каждом $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ решать однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_k)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_k)x_n = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ввиду того, что матрица этой системы имеет нулевой определитель, ее решение определяется с точностью до произвольной константы c :

$$\vec{x}_\lambda = c \cdot (x_1^\lambda, \dots, x_n^\lambda).$$

В качестве примера найдем собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 3 \\ -2 & 4 - \lambda & 5 \\ 3 & 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 - 19\lambda + 89 = 0.$$

Построим график $P(\lambda)$, найдем приближенное значение каждого корня, после этого решаем уравнение $P(\lambda) = 0$ численно, находим

$$\{\lambda_1 = -4.284, \lambda_2 = 3.762, \lambda_3 = 5.522\}.$$

При $\lambda_1 = -4.284$, получим систему

$$\begin{cases} 6.284x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8.284x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3.284x_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой однородной системы равен нулю, поэтому она имеет бесконечное множество решений. Одну из переменных можно взять произвольно, например, $x_3 = c_1$ и отбросить одно из уравнений. Тогда получим

$$\begin{cases} 6.284x_1 - x_2 = -3c_1 \\ -2x_1 + 8.284x_2 = -5c_1 \end{cases} \rightarrow \vec{x}_{\lambda_1} = c_1 \cdot (-0.597, -0.746, 1).$$

Действуя аналогично, при $\lambda_2 = 3.762$, $x_1 = c_2$, получим $\vec{x}_{\lambda_2} = c_2 \cdot (1, -0.492, 0.423)$.

При $\lambda_3 = 5.522$, $x_3 = c_3$, получим $\vec{x}_{\lambda_3} = c_3 \cdot (-0.008, 0.228, 1)$.

Вопросы и задания для проверки

1. Что называется областью определения линейного оператора и областью его значений?
2. Что такое линейный функционал? Приведите примеры операторов и функционалов.
3. Сформулируйте четыре основные задачи для операторов.
4. Изложите алгоритм итерационного метода.
5. Изложите алгоритм проекционного метода.
6. Сформулируйте четыре основные задачи линейной алгебры.
7. Как находятся собственные значения и собственные векторы матрицы?

Лекция 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Уравнения математической физики

Одной из задач теоретической физики является исследование полей физических величин, например, таких, как температурное поле, электромагнитное поле, поле скоростей, поле вероятности. При этом под физическим полем понимают область пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины.

В общем случае любое физическое явление или процесс представляет собой изменение каких-либо физических величин в пространстве и во времени. Поэтому классические физические поля, вообще говоря, описываются функциями четырех независимых переменных x, y, z, t , и задача состоит в нахождении и изучении этих функций.

Математической моделью физического поля является некоторая скалярная, векторная или тензорная функция $F(x, y, z, t)$, в общем случае зависящая от четырех независимых переменных и определенная на заданной области D .

Поля бывают скалярные, векторные и тензорные. Каждое из них, может быть стационарным (если физическая величина в каждой точке области со временем не меняется) или нестационарным, одномерным (если зависит только от одной пространственной переменной), двумерным или трехмерным. Стационарное поле есть функция координат точек пространства, а нестационарное поле представляет собой функцию координат и времени t , например: $T(x, y, z)$ – скалярное стационарное трехмерное поле; $\vec{V}(x, t)$ – векторное нестационарное одномерное поле; $\vec{E}(x, y, t), \vec{H}(x, y, t)$ – векторные двумерные нестационарные поля; $\vec{G}(x, y, z)$ – тензорное (\vec{G} – матрица) стационарное трехмерное поле.

Изучением дифференциальных и интегральных свойств различных полей занимается *математическая теория поля*. В этой теории для анализа векторных $\vec{v} = v_x(x, y, z, t) \cdot \vec{x}_0 + v_y(x, y, z, t) \cdot \vec{y}_0 + v_z(x, y, z, t) \cdot \vec{z}_0$ и скалярных $u(x, y, z)$ функций используются пространственные операторы дифференцирования $\operatorname{div} \vec{v}, \operatorname{rot} \vec{v}, \nabla u, \nabla^2 u$, которые были определены в лекции 3. Имеется ряд основополагающих интегральных соотношений, которые отражают закономерности реальных физических полей. Приведем наиболее часто используемые при построении вычислительных алгоритмов.

– *теорема Остроградского – Гаусса:*

$$\oiint_{\Gamma} (\vec{v}, \vec{n}) d\Gamma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} d\Omega,$$

здесь Ω – область (трехмерная, двумерная), ограниченная замкнутой поверхностью (контуром) Γ ; \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности (контур);

– вторая теорема Грина:

$$\iiint_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d\Omega = \oiint_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) d\Gamma;$$

– формула интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega + \oint_{\Gamma} \varphi \psi (\vec{n}, \vec{x}_{0i}) d\Gamma, \quad \begin{matrix} x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z; \\ \vec{x}_{01} = \vec{x}_0, \vec{x}_{02} = \vec{y}_0, \vec{x}_{03} = \vec{z}_0 \end{matrix}$$

где $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ – скалярные поля, Ω – область (трехмерная, двумерная), ограниченная замкнутой поверхностью (контуром) Γ .

Основная задача математической физики состоит в нахождении распределения некоторой физической величины в заданной области Ω пространства, если известны условия, в которых находится физический объект (в частности условия на границе Γ). Довольно часто задача нахождения поля, удовлетворяющего требуемым условиям, приводит к решению краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП) порядка m , которое представляет собой некоторое соотношение, связывающее неизвестную функцию $u(x, y, z, t)$, ее частные производные $\partial^k u / \partial x_i^k$ до порядка m включительно и независимые переменные x, y, z, t :

$$F \left(x, y, z, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial z^m}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(x, y, z, t).$$

Методы составления и, главное, решения уравнений такого рода изучаются в разделе математической физики – **теория дифференциальных уравнений в частных производных**. Эти уравнения исторически получили название «уравнения математической физики».

Решением ДУЧП является бесконечное семейство функций $u(x, y, z, t)$, отвечающих различным условиям, в которых находится исследуемое поле. Если дифференциальное уравнение (ДУ) зависит от одной независимой переменной, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) и его решением является семейство функций от одной переменной, например $u(x)$.

4.2. Основные типы уравнений в частных производных

Наш мир устроен так удивительно, что большинство окружающих нас физических полей описывается дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка или, если имеется несколько взаимосвязанных по-

лей, – системами таких уравнений. Более того, если процессы не слишком интенсивны, то при их описании можно ограничиться линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Самый общий вид такого уравнения

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f; \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t. \quad (4.1)$$

Оказывается, что свойства решений (4.1) существенно зависят от коэффициентов, стоящих при старших производных. Причем с помощью соответствующей замены независимых переменных уравнение (4.1) может быть приведено к одному из следующих трех типов.

1. Параболические:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u + f. \quad (4.2)$$

Более общий случай:

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(c \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f \quad \text{или} \quad a \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (c \cdot \operatorname{grad} u) + f.$$

К этому типу сводятся уравнения для физических полей, описывающих диссипативные процессы: теплопроводность – поле температуры $T(x, y, z, t)$; диффузия – поле концентрации $C(x, y, z, t)$ (например сахара в растворе). Уравнение (4.2) получило название **уравнение теплопроводности**.

Процесс распространения возмущения, возникающего в таком поле, имеет затухающий характер, и для одномерного случая этот процесс иллюстрирует рис. 4.1, на котором вначале (при $t = 0$) компактное возмущение температуры в последующие моменты времени «расползается» по пространству.

Одномерное ДУЧП:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

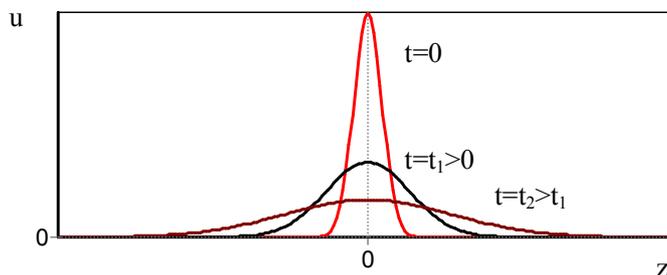


Рис. 4.1. Развитие возмущения

2. Гиперболические:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u + f. \quad (4.3)$$

Более общий случай:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(c \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f \quad \text{или} \quad \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} (c \cdot \operatorname{grad} u) + f.$$

К этому типу сводятся уравнения для физических полей, описывающих волновые процессы – распространение звука, электромагнитные волны, поле вероятностей в квантовой физике. Уравнение (4.3) получило название **уравнение Д’Аламбера**, или **неоднородное волновое уравнение**.

Процесс распространения возмущения, возникающего в таком поле, имеет вид бегущих в разных направлениях возмущений, причем в одномерном случае, представленном на рис. 4.2, возмущения не затухают.

Одномерное ДУЧП:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Решение имеет вид
 $u = f(t \pm z).$

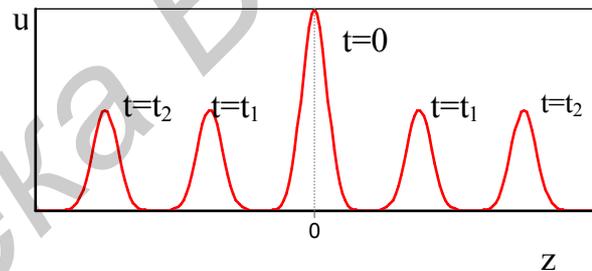


Рис. 4.2. Развитие возмущения

3. Эллиптические (описывают стационарные процессы):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \quad \text{или} \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = f. \quad (4.4)$$

В более общем случае:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(c \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f \quad \text{или} \quad \operatorname{div} (c \cdot \operatorname{grad} u) = f.$$

К этому типу сводятся уравнения для многих физических полей: электростатические и магнитостатические поля, установившееся температурное поле и поле концентраций и др. Уравнение (4.4) получило название **уравнение Пуассона**; если $f = 0$ – **уравнение Лапласа**.

При постановке задач для ДУЧП обычно требуется найти распределение поля $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющее ДУ в некоторой области пространства Ω с

границей Γ , причем область может быть как ограниченной, так и полуограниченной.

Оказывается, что семейство решение ДУЧП в отличие от ОДУ не зависит от конечного набора произвольных констант, а содержит произвольные дифференцируемые функции, т. е. пространство решений является бесконечномерным. Например, решением одномерного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ является произвольная, дважды дифференцируемая функция с аргументом $t - z$, или $t + z$: $u = f(t \pm z)$ (бегущие влево и вправо волны, см. рис. 4.2), в чем легко убедиться прямой подстановкой.

Для выделения единственного искомого решения из пространства решений необходимо задать дополнительные условия. Чаще всего ими являются начальные условия (для нестационарных полей, описываемых уравнениями (4.2), (4.3)) и граничные (краевые) условия.

Начальные условия задают значение искомой функции в начальный момент времени. При этом для ДУ (4.2) достаточно задать

$$u|_{t=0} = U^0(x, y, z). \quad (4.5)$$

Для ДУ (4.3), содержащего вторую производную по времени, нужно задать еще начальное распределение производных:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = U_{\partial}^0(x, y, z). \quad (4.6)$$

Граничные (краевые) условия задают либо значения искомой функции на границе Γ области – условия (первого рода) Дирихле:

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\Gamma), \quad (4.7)$$

либо значения производной на границе – условия (второго рода) Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = \psi(\Gamma), \quad (4.8)$$

либо некоторое соотношение между производной и значением функции на границе – условия (третьего рода) Ньютона:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u \right) \Big|_{\Gamma} = \gamma(\Gamma). \quad (4.9)$$

Задачи для (4.2), (4.3) с начальным условием (4.5), (4.6) и граничным условием (4.7) – (4.9) называют задачами Коши, задачи для (4.4) с (4.7) – (4.9) – краевыми задачами.

4.3. Два наиболее часто используемых специальных метода решения линейных дифференциальных уравнений

4.3.1. Метод комплексных амплитуд

При решении линейных дифференциальных уравнений очень часто полезно используется тот факт, что производная от экспоненциальной функции e^x равна тоже экспоненциальной функции, т. е. $\frac{de^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}$, а экспоненциальная функция комплексного аргумента представляется по формуле Эйлера:

$$e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i \cdot \sin(\alpha x) \cdot (i = \sqrt{-1}).$$

Рассмотрим краевую задачу вида

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0; \quad u(0) = 0; \quad u(b) = 0. \quad (4.10)$$

Согласно нашей классификации, это задача на собственные значения III ($Lu = -\lambda u$, для оператора $L = \frac{d^2}{dx^2}$). Требуется найти набор собственных значений λ_k и собственных функций $u_k(x)$, удовлетворяющих (4.10).

Решение (4.10) будем искать в виде $u = e^{i\alpha x}$. После подстановки в дифференциальное уравнение, получаем $u' = i\alpha u$; $u'' = -\alpha^2 u$:

$$-\alpha^2 u + \lambda^2 u = 0 \Rightarrow \text{для } u \neq 0 \Rightarrow -\alpha^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \lambda.$$

В результате находим два базисных решения дифференциального уравнения второго порядка: $u_1 = e^{i\lambda x}$; $u_2 = e^{-i\lambda x}$. Следовательно, общее комплексное решение дифференциального уравнения второго порядка представляет линейную оболочку, натянутую на эти две функции и имеет вид

$$u = a_1 e^{i\lambda x} + a_2 e^{-i\lambda x}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a_1, a_2 используем граничные условия и составим систему уравнений:

$$u(0) = 0: \Rightarrow a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1;$$

$$u(b) = 0: \Rightarrow a_1 e^{i\lambda b} + a_2 e^{-i\lambda b} = 0 \Rightarrow a_1 (e^{i\lambda b} - e^{-i\lambda b}) = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что нетривиальное (ненулевое) решение задачи существует если $(e^{i\lambda b} - e^{-i\lambda b}) = 2i \sin(\lambda b) = 0$. Но $\sin(\lambda b) = 0$ при $\lambda = \lambda_k = k\pi / b$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, нетривиальное решение краевой задачи существует только при определенных значениях параметра λ_k (собственных значениях) и определяется с точностью до константы a как $u_k(x) = a \cdot \sin(k\pi x / b)$ (собственные функции).

Набор собственных функций $\left\{ \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{b}x\right), \dots, \sin\left(\frac{k\pi}{b}x\right), \dots \right\}$

представляет ортогональный базис на интервале $[0, b]$.

4.3.2. Метод разделения переменных Фурье для решения уравнений в частных производных

Проиллюстрируем применение этого метода для простейшего волнового уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4.11)$$

Необходимо найти неизвестную функцию двух переменных $u(x, t)$, удовлетворяющую (4.11).

Это уравнение описывает свободные колебания в одномерной среде. Например, звуковые колебания в стержне из упругого материала, электромагнитные колебания вдоль провода, распространение света вдоль стекловолокна. Однако впервые оно было получено и исследовано для описания колебаний в струне (например гитарной), поэтому и получило название **уравнения колебаний струны**. Для этого случая функция $u(x, t)$ интерпретируется как отклонение гибкой, упругой натянутой струны от положения равновесия $u = 0$ в момент времени $t > 0$ в точке $0 < x < b$. Ввиду натяжения струны, при ее отклонении от

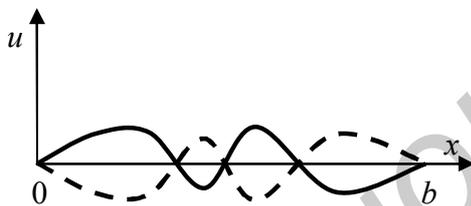


Рис. 4.3. Колебание струны

положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть струну в исходное состояние. Ввиду наличия массы струна каждый раз по инерции проскакивает положение равновесия и отклоняется в противоположную сторону. В результате наблюдается сложный процесс колебаний (рис. 4.3), который определяется как начальным отклонением, так и физическими параметрами струны.

Легко заметить, что функции вида $u^+ = f(t - ax)$, $u^- = f(t + ax)$ для любой $f(z)$ удовлетворяют уравнению (4.11). Действительно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_{zz}(t \mp x/a); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} f_{zz}(t \mp x/a)$$

и после подстановки в (4.11) получаем тождество. Если струна бесконечно длинная, то любое возникшее при $t = 0$ начальное возмущение $f(x)$ распространяется вдоль струны влево и вправо от точки возмущения со скоростью $v = a$. Так как концы закреплены, то эти возмущения многократно «отражаются» от границ, в результате наблюдаются так

называемые стоячие волны, которые представлены на рис. 4.3 через полпериода колебания.

Чтобы определить конкретное однозначное решение задачи, необходимо задать начальные и граничные условия.

$$\text{Начальные: } u(x, 0) = f(x); \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x); \quad (4.12)$$

$$\text{Граничные: } u(0, t) = 0; u(b, t) = 0 \rightarrow f(0) = 0; f(b) = 0. \quad (4.13)$$

Ввиду линейности уравнения (4.11) множество его решений является линейной оболочкой базисных элементов $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$, представляющих частные независимые решения задачи.

Для нахождения базисных элементов Фурье предложил метод разделения переменных, согласно которому частные (базисные) решения рассматриваемой задачи нужно искать в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Тогда, подставляя в (4.11), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) T''(t); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) T(t)$$

и уравнение (4.11) запишем в виде

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t).$$

Далее разделим переменные:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \lambda = \text{const} \in P.$$

Слева стоит функция от t , справа функция от x , поэтому равенство может выполняться тогда и только тогда, когда эти отношения постоянны и равны некоторому числу, которое обозначим λ . Отсюда получаем два разделенных дифференциальных уравнения от одного аргумента:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (4.14)$$

Первое из уравнений (4.14) при краевых условиях $X(0) = X(b) = 0$ представляет задачу на собственные значения. Как было показано выше (п. 4.3.1), решением этой задачи является бесконечный набор собственных функций вида

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{b} x, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2; \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь, подставляя полученные значения λ_k во второе уравнение (4.14) и используя метод комплексных амплитуд, получим общее решение второго уравнения (без учета начальных условий):

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{a\pi k}{b} t + b_k \sin \frac{a\pi k}{b} t.$$

Здесь a_k, b_k – произвольные коэффициенты.

Таким образом, набор частных решений для (4.11) получим в виде

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos \frac{a\pi k}{b} t + b_k \sin \frac{a\pi k}{b} t \right) \sin \frac{\pi k}{b} x.$$

Скомбинируем теперь общее решение в виде линейной комбинации частных решений (учтем тот факт, что здесь a_k, b_k – произвольные коэффициенты), получим

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{a\pi k}{b} t + B_k \sin \frac{a\pi k}{b} t \right) \sin \frac{\pi k}{b} x.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_k, B_k воспользуемся начальными условиями (4.12), (4.13):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{b} x = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{b} B_k \sin \frac{\pi k}{b} x = \varphi(x).$$

Мы получили разложение функций $f(x), \varphi(x)$ в ряды Фурье по синусам. Поэтому неизвестные коэффициенты определяются по стандартным формулам получения коэффициентов Фурье:

$$A_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin \frac{\pi k x}{b} dx, \quad B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^b \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{b} dx.$$

Вопросы и задания для проверки

1. Как определяется физическое поле и что представляет его математическая модель?
2. Как формулируется прямая и обратная полевая задача, и что является содержанием математической теории поля?
3. Напишите три основных типа дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и охарактеризуйте процессы, которые они описывают.
4. Для чего и как ставятся граничные условия для дифференциальных уравнений?
5. Приведите пример решения задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом комплексных амплитуд.
6. Как решается волновое уравнение методом Фурье?

Лекция 5. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

5.1. Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Задача о распространении волн в цилиндрическом волноводе очень часто встречается в практических приложениях (электромагнитная волна в коаксиальном волноводе, в полном волноводе круглого сечения, в диэлектрическом световоде, звуковая волна в трубе, заполненной жидкостью).

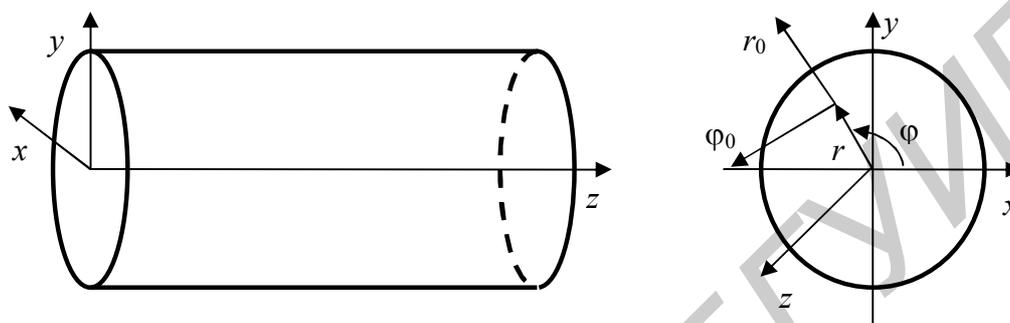


Рис. 5.1. Цилиндрический волновод

Математической моделью всех этих процессов является волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{div}(\text{grad } u).$$

При расчетах процессов в таком волноводе удобно перейти от декартовой системы координат с единичными ортами $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ и координатами (x, y, z) к цилиндрической системе координат, в которой в каждой точке рассматриваемой области вводятся система ортов $(\vec{\varphi}_0, \vec{r}_0, \vec{z}_0)$ и координат (φ, r, z) (рис. 5.1).

Формулы перехода от одной системы координат в другую имеют вид

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z; \text{ или } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}, z = z.$$

Как мы уже знаем, в декартовой системе выражение для лапласиана

$$\text{div grad } u \text{ определяется как } \text{div grad } u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

При переходе в цилиндрическую систему координат оно принимает вид

$$\text{div grad } u(\varphi, r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поэтому волновое уравнение в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (5.1)$$

5.2. Уравнения Бесселя

Воспользуемся методом комплексных амплитуд и будем искать решение (5.1) в виде

$$u = y(r) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-in\varphi} \cdot e^{-ikz}, \quad (5.2)$$

получим

$$\begin{aligned} -\omega^2 y \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-in\varphi} \cdot e^{-ikz} = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) e^{i\omega t} \cdot e^{-in\varphi} \cdot e^{-ikz} - \frac{n^2}{r^2} y \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-in\varphi} \cdot e^{-ikz} - k^2 y \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-in\varphi} \cdot e^{-ikz}. \end{aligned}$$

Разделим на множитель $e^{i\omega t} \cdot e^{-in\varphi} \cdot e^{-ikz}$, приведем подобные члены и получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \left(\omega^2 - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) y = 0. \quad (5.3)$$

К такому уравнению приходят при решении многих задач для уравнений математической физики в цилиндрической геометрии.

Важным параметром в уравнении (5.3) является величина $\omega^2 - k^2$. Например, если $\omega^2 - k^2 > 0$, то фазовая скорость электромагнитной волны в волноводе больше скорости света, если $\omega^2 - k^2 < 0$, то распространяется замедленная волна, ее фазовая скорость меньше скорости света.

Чтобы выделить эти два случая, обозначим $\omega^2 - k^2 = \chi^2 > 0$, или $\omega^2 - k^2 = -\chi^2 < 0$, получим соответственно два линейных дифференциальных уравнения второго порядка с различными коэффициентами при y :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \left(\chi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) - \left(\chi^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) y = 0. \quad (5.4)$$

Сделаем замену переменных $x = \chi r$, в результате первое уравнение (5.4) преобразуется к стандартному виду, которое получило название **уравнения Бесселя**:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (5.5)$$

Второе уравнение (5.4) преобразуется к стандартному виду, которое можно назвать **модифицированным уравнением Бесселя**:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (5.6)$$

Эти уравнения могут быть записаны в разном эквивалентном виде, например:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \text{ или } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Известно, что точное решение этих уравнений не может быть получено в квадратурах.

5.3. Функции Бесселя первого и второго рода

5.3.1. Определения и графики

По определению, решения уравнения Бесселя

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

(ν – произвольное действительное число) **называются функциями Бесселя** $J_\nu(x)$, **или цилиндрическими функциями**. Находят эти решения различными численными методами, обычно в виде отрезка бесконечного ряда. Например, одно из решений имеет вид

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad \text{для } \nu = n \text{ целых} \quad J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Это решение называется **функцией Бесселя первого рода**. Здесь индекс ν или n соответствует параметру в уравнении (ν может быть отрицательным).

Как известно, пространство решений дифференциального уравнения второго порядка представляет линейную оболочку двух линейно независимых решений. Поэтому, зная два независимых решения, легко получить любое решение уравнения Бесселя. Чаще всего в качестве базисных используют два линейно независимых решения уравнения (5.5) – функцию Бесселя первого рода $y_1(x) = J_n(x)$ и **функцию Неймана** $y_2(x) = Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$, которая называется также **функцией Бесселя второго рода**.

Линейная независимость этих функций обеспечивается тем, что при $x \rightarrow 0$ $J_0(x) \rightarrow 1$, $J_{n>0}(x) \rightarrow 0$, а $Y_n(x) \rightarrow -\infty$.

Общее решение (5.5) получают в виде

$$y(x) = a_1 J_n(x) + a_2 Y_n(x).$$

Заметим, что решение первого уравнения Бесселя (5.4) получается в виде

$$y(x) = a_1 J_n(\chi x) + a_2 Y_n(\chi x).$$

Графики функций Бесселя и Неймана представлены на рис. 5.2.

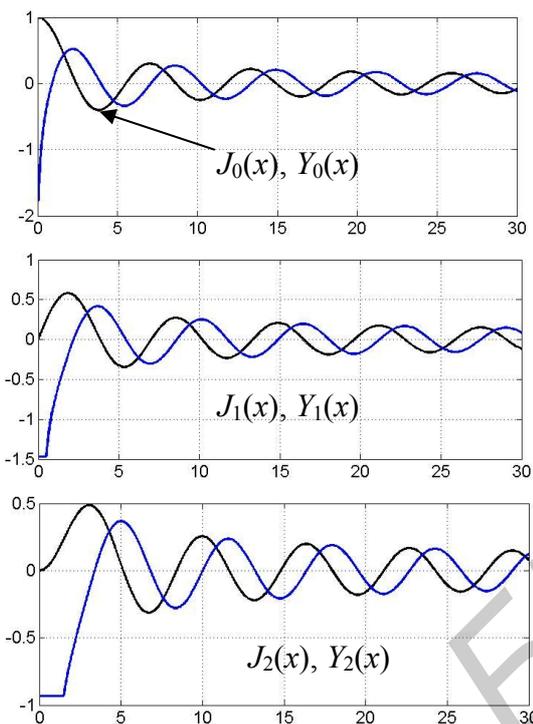


Рис. 5.2. Функции Бесселя первого и второго рода

Из графика видно, что максимальному значению $J_n(x)$ соответствует корень $Y_n(x) = 0$ и наоборот. Эти функции дифференцируемы бесконечное число раз. То есть в некотором смысле эти функции аналогичны элементарным функциям $\sin(x)$, $\cos(x)$.

5.3.2. Рекуррентные соотношения

для функций Бесселя первого и второго рода

При вычислениях бывают полезны следующие соотношения между функциями Бесселя ($J_n(x)$ или $Y_n(x)$) различных индексов n .

$$1. \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^{n-1} J_{n-1}(x).$$

$$2. \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\frac{J_n(x)}{x^n} \right] = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^{n+1}}.$$

$$3. \quad \frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x).$$

$$4. \quad 2 \frac{d}{dx} [J_n(x)] = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

Эти соотношения справедливы и для функции $Y_n(x)$.

Например, зная значения $J_0(x)$, $J_1(x)$ и используя соотношение 3, легко получить значение $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$; затем, зная $J_1(x)$, $J_2(x)$, получаем $J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x) = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x)$. Таким образом, зная $J_0(x)$, $J_1(x)$, можно вычислить $J_n(x)$ для любого $n > 1$.

5.3.3. Ортогональная система функций Бесселя первого рода

При решении задач математической физики в цилиндрической системе координат часто используют ортогональную на интервале $[0,1]$ систему функций

$$\left\{ \sqrt{x}J_n(v_{n1}x), \sqrt{x}J_n(v_{n2}x), \dots, \sqrt{x}J_n(v_{nk}x), \dots \right\}.$$

Здесь v_{nk} – k -й корень функции $J_n(x)$, т. е. $J_n(v_{nk}) = 0$.

Приведем в качестве примера несколько значений корней:

$$v_{01} = 2.405, v_{02} = 5.520, v_{03} = 8.654, v_{04} = 11.792.$$

$$v_{11} = 3.832, v_{12} = 7.016, v_{13} = 10.173, v_{14} = 13.324.$$

Имеет место соотношение

$$\int_0^1 x J_n(v_{nk}x) J_n(v_{nm}x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{1}{2} [J'_n(v_{nk})]^2, & k = m. \end{cases}$$

Используя эту систему, легко найти разложение любой функции на интервале $[0,1]$ в ряд по функциям Бесселя:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_n(v_{nk}x); \quad a_k = \frac{\int_0^1 f(x) J_n(v_{nk}x) x dx}{0.5 [J'_n(v_{nk})]^2}.$$

Этот ряд получил название ряда Фурье – Бесселя.

5.3.4. Интегральное представление функции Бесселя

Представление функции Бесселя в виде интеграла используется во многих приложениях. Одно из простейших таких представлений для целого индекса n имеет вид

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi.$$

Этот интеграл называется **интегралом Бесселя**. Он обычно используется при изучении частотно-модулируемых сигналов.

5.4. Модифицированные функции Бесселя

5.4.1. Определения и графики

По определению, **модифицированными функциями Бесселя** называются решения модифицированного уравнения Бесселя:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Одно из решений для целых $\nu=n$ получено в виде ряда:

$$y_1(x) = I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n}.$$

Это решение называется **модифицированной функцией Бесселя первого рода**. В качестве второго базисного решения служит **функция Макдональда**, или **модифицированная функция Бесселя второго рода**:

$$y_2(x) = K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)}{2 \sin \nu \pi}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.6) записывается в виде

$$y(x) = a_1 I_n(x) + a_2 K_n(x).$$

При этом решение уравнения Бесселя (5.4) получается в виде

$$y(x) = a_1 I_n(\chi x) + a_2 K_n(\chi x).$$

Графики модифицированных функций Бесселя представлены на рис. 5.3.

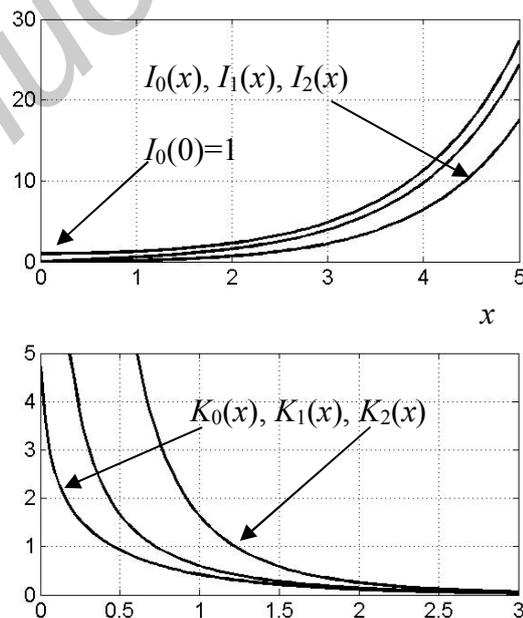


Рис. 5.3. Модифицированные функции Бесселя первого и второго рода

5.4.2. Рекуррентные соотношения

для модифицированных функций Бесселя первого и второго рода

При вычислениях полезны следующие соотношения между функциями Бесселя $I_n(x)$ различных индексов n :

$$1) \quad x \frac{d}{dx} [I_n(x)] = -nI_n(x) + xI_{n-1}(x).$$

$$2) \quad x \frac{d}{dx} [I_n(x)] = nI_n(x) + xI_{n+1}(x).$$

$$3) \quad \frac{2n}{x} I_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x).$$

$$4) \quad 2 \frac{d}{dx} [I_n(x)] = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x).$$

Для функции $K_n(x)$ аналогичные соотношения имеют следующий вид:

$$1) \quad x \frac{d}{dx} [K_n(x)] = -nK_n(x) - xI_{n-1}(x).$$

$$2) \quad x \frac{d}{dx} [K_n(x)] = nK_n(x) - xK_{n+1}(x).$$

$$3) \quad -\frac{2n}{x} K_n(x) = K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x).$$

$$4) \quad -2 \frac{d}{dx} [K_n(x)] = K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x).$$

5.5. Наиболее важные асимптотические формулы

При $x \rightarrow \infty$: т. е. при $x > 10$ можно пользоваться следующими приближенными формулами:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right); \quad Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}; \quad K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x}.$$

Вопросы и задания для проверки

1. Запишите волновое уравнение в декартовой и цилиндрической системах координат.
2. Как получаются уравнение Бесселя и модифицированное уравнение Бесселя?
3. Нарисуйте примерные графики функций $J_1(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $K_0(x)$.
4. Как ведут себя эти функции при больших значениях аргумента?

Лекция 6. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Пример постановки задачи

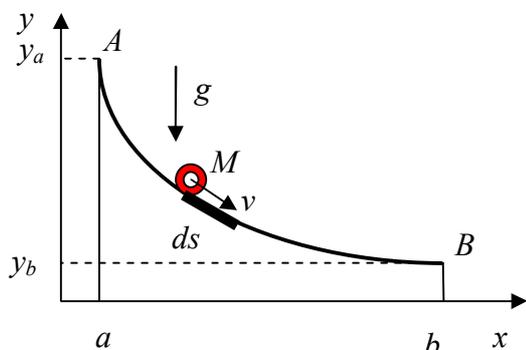


Рис.6.1. Задача Бернулли

Рассмотрим задачу об отыскании кривой наиболее быстрого спуска из точки A в точку B под действием силы тяжести без учета сил трения и при начальной нулевой скорости (рис. 6.1). Например, при какой форме крыши вода по ней стекает наиболее быстро? Эту задачу впервые поставил и решил Иоганн Бернулли в 1696 г. Рассмотрим ход рассуждений при решении этой задачи.

В принятых координатах уравнение искомой кривой запишем в виде $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Какой должна быть кривая, чтобы время спуска по ней точки $M(x, y(x))$, имеющей массу m , было минимальным?

При движении сумма потенциальной $U = mgy(x)$ и кинетической $\frac{mv^2(x)}{2}$ энергии сохраняется и равна полной энергии E , которая равна $E = mgy_a$, т. к. вначале скорость v равна нулю ($v(a) = 0$). В силу закона сохранения энергии имеем $\frac{mv^2(x)}{2} + mgy(x) = mgy_a$, откуда получаем, что скорость точки M равна $v(x) = \sqrt{2g(y_a - y(x))}$. Тогда время пробега отрезка ds будет

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}} = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2g(y_a - y(x))}} dx.$$

В результате получаем, что время спуска для кривой $y(x)$ определяется как

$$t = \Phi[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y_a - y(x)}} dx. \quad (6.1)$$

Здесь Φ – нелинейный функционал «функция от функции», который отображает множество функций $y(x)$, удовлетворяющих на концах отрезка условиям $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ на множество чисел. Теперь осталось среди всевозможных функций $y(x)$ найти такую, для которой время было бы минимальным. Но как найти такую минимизирующую функционал функцию?

Бернулли в свое время нашел такую функцию, которая получила название «брахистохрона». В параметрической форме уравнение брахистохроны записывается в виде

$$x = a + (b - a) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi_0 - \sin \varphi_0}; \quad y = y_a - (b - a) \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi_0 - \sin \varphi_0}; \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

Здесь значение φ_0 находится из условия $\frac{y_b - y_a}{b - a} = -\frac{1 - \cos \varphi_0}{\varphi_0 - \sin \varphi_0}$. Ее график похож на тот, что представлен на рис. 6.1.

С этой задачи и зародился новый раздел математики – «вариационное исчисление», названный по аналогии с разделом «дифференциальное исчисление».

6.2. Общая задача вариационного исчисления, вариация функционала

Задачи, подобные вышеописанной, можно сформулировать в общем виде следующим образом.

Имеется функционал $\Phi[y(x)] \rightarrow P$, определенный на множестве функций $y \in Y$, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Требуется среди этих функций найти такую функцию y^m , на которой функционал достигает своего минимума (или максимума), т. е. для $\forall y(x) \neq y^m(x)$, $\Phi[y(x)] > \Phi[y^m(x)]$. Кривая $y^m(x)$ в этом случае называется *экстремалью*.

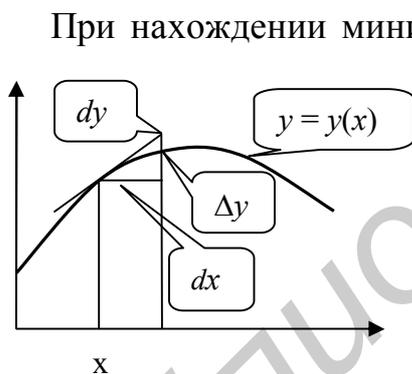


Рис.6.2. Дифференциал

При нахождении минимума функции используют производную, которая по определению равна отношению *дифференциала* функции $dy(x) = y'(x)dx$ к приращению аргумента dx в каждой точке. В точке экстремума дифференциал равен нулю. Как известно из курса дифференциального исчисления, *дифференциал* – это *главная линейная часть приращения функции* при приращении ее аргумента. Как видно из рис. 6.2, дифференциал dy может не совпадать с приращением функции $\Delta y = y(x + dx) - y(x)$. По аналогии с определением дифференциала функции для функционала вводят понятие *вариации функционала*.

Вначале рассмотрим понятие *вариации функции* $y(x)$, являющейся аргументом функционала $\Phi[y(x)]$.

Вариацией функции $\delta y(x)$ (или приращением функции) называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$, принадлежащих выбранному классу Y :

$$\delta y = \tilde{y}(x) - y(x).$$

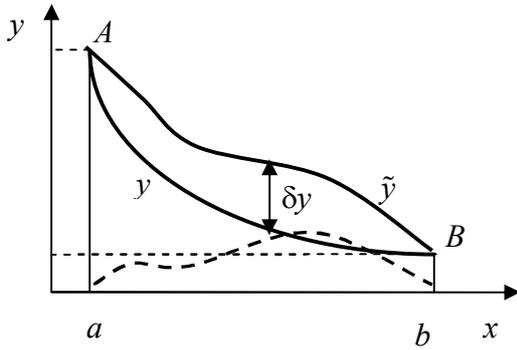


Рис. 6.3. Вариация функции

Заметим, что вариация сама является функцией, она показана пунктиром на рис. 6.3. Для близких функций, в смысле выбранного расстояния в Y , вариация дет близка к нулевой функции. Обычно при решении вариационных задач рассматриваются классы функций, удовлетворяющих граничным условиям. В этом случае вариация удовлетворяет нулевым условиям на границах.

Вариация функционала: $\delta\Phi[y(x)]$.

Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ задан на множестве Y функций, удовлетворяющих граничным условиям.

Приращением функционала $\Phi[y(x)]$, отвечающим приращению $\delta y(x)$ аргумента, называется величина

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi[y(x)] = \Phi[y(x) + \delta y(x)] - \Phi[y(x)].$$

Определение вариации функционала.

Допустим, что приращение функционала $\Delta\Phi = \Phi[y(x) + \delta y(x)] - \Phi[y(x)]$ можно представить в виде $\Delta\Phi = L[\delta y(x)] + \psi[(\delta y)^2, (\delta y)^3, \dots]$, где $L[\delta y(x)]$ – линейный функционал от $\delta y(x)$, а $\psi[(\delta y)^2, (\delta y)^3, \dots]$ – остаточный член, который при $\|\delta y\| \rightarrow 0$ стремится к нулю не медленнее, чем квадрат вариации: $\|\psi[(\delta y)^2, (\delta y)^3, \dots]\| < C \cdot \|\delta y(x)\|^2$ (C – некоторая константа). Тогда главная линейная по отношению к $\delta y(x)$ часть приращения функционала $L[\delta y(x)]$ называется вариацией функционала и обозначается $\delta\Phi = L[\delta y(x)]$.

Доказано, что если вариация функционала существует, то она определяется единственным образом.

Пример 1. Найдем вариацию линейного функционала $\Phi[y(x)] = \int_a^b y(x) dx$.

Находим приращение функционала:

$$\Delta\Phi[y(x)] = \Phi[y(x) + \delta y(x)] - \Phi[y(x)] = \int_a^b [y(x) + \delta y(x)] dx - \int_a^b y(x) dx = \int_a^b \delta y(x) dx.$$

Таким образом, приращение $\Delta\Phi[y(x)] = \int_a^b \delta y(x) dx = L[\delta y(x)] = \delta\Phi[y(x)]$ и есть линейный функционал относительно $\delta y(x)$ и, следовательно, в точности равно вариации функционала.

Заметим, что по аналогии дифференциал df от линейной функции равен приращению Δf .

Пример 2. Найдем вариацию нелинейного функционала: $\Phi[y(x)] = \int_a^b y^2(x) dx$.

Находим приращение функционала:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi[y(x)] &= \Phi[y(x) + \delta y(x)] - \Phi[y(x)] = \\ &= \int_a^b [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_a^b y^2(x) dx = \int_a^b \left\{ y^2(x) + 2y(x)\delta y(x) + [\delta y(x)]^2 \right\} dx - \int_a^b y^2(x) dx = \\ &= \int_a^b 2y(x)\delta y(x) dx + \int_a^b [\delta y(x)]^2 dx = L[\delta y(x)] + \psi\left[(\delta y)^2\right]. \end{aligned}$$

В пространстве $C[a, b]$ справедливо неравенство

$$\psi\left[(\delta y)^2\right] = \int_a^b [\delta y(x)]^2 dx \leq (b-a)\|\delta y\|^2 = C\|\delta y\|^2,$$

т. е. остаточный член стремится к нулю не медленнее, чем квадрат вариации аргумента. В результате получаем, что вариация равна $\delta\Phi = 2 \int_a^b y(x)\delta y(x) dx$.

Второе определение вариации функционала. Не всегда удобно находить вариацию, используя первое определение. Поэтому часто используют определение, которое ввел французский математик Лагранж. Согласно этому определению, вариация функционала может быть получена как значение производной функционала $\Phi[y(x) + s\delta y(x)]$ по параметру s при $s = 0$ (здесь s – число):

$$\delta\Phi = \left. \frac{\partial\Phi[y(x) + s\delta y(x)]}{\partial s} \right|_{s=0}. \quad (6.2)$$

Пример 3. Найдем опять вариацию функционала:

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b y^2(x) dx.$$

Используя второе определение, найдем выражение для производной:

$$\frac{\partial \Phi[y(x) + s \delta y(x)]}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b [y(x) + s \delta y(x)]^2 dx = 2 \int_a^b [y(x) + s \delta y(x)] \delta y(x) dx.$$

При $s = 0$ получаем тот же результат, что и в примере 2: $\delta \Phi = 2 \int_a^b y(x) \delta y(x) dx$.

Теперь можно сформулировать основную теорему об экстремуме функционала.

Теорема (необходимое условие экстремума функционала)

Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает экстремума при $y = y^m(x) \in Y$, то имеет место равенство нулю вариации функционала $\delta \Phi[y^m(x)] = 0$.

Функции, для которых $\delta \Phi[y^m(x)] = 0$, называются стационарными функциями, или *экстремальями*, т. е. это кривые, на которых может достигаться искомый минимум функционала.

6.3. Общий метод нахождения минимума функционала

На основании вышеприведенной теоремы для поиска минимума функционала следует найти его вариацию, после чего решать получившееся функциональное (чаще всего дифференциальное) уравнение:

$$\delta \Phi[y^m(x)] = 0. \quad (6.3)$$

Если же вариацию найти не удалось или же полученное функциональное уравнение слишком сложное для решения, то используют самый универсальный и во многих случаях единственно возможный метод, предложенный Ритцем (W. Ritz, 1908 г.). Иногда его называют методом пробных функций. Теоретическим обоснованием этого метода занимались Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. Чаще всего этот метод реализуется следующим образом.

Выбираем в области определения Y функционала Φ некоторый *базис*, т. е. набор линейно независимых функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$, обладающих *свойством полноты*: любая функция $y(x)$ из области решений может быть

представлена в виде $y(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$.

Будем искать приближение к функции, доставляющей минимум функционала $\Phi[y(x)]$, в виде $y^m \approx y^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$. После подстановки $y^N(x)$ в

функционал $\Phi[y(x)]$ получим функцию N переменных:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_N) = \Phi[y^N] = \Phi \left[\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right].$$

Неизвестные значения коэффициентов разложения a_1, a_2, \dots, a_N искомого решения по функциям базиса будем находить из условия $\min_{a_1, \dots, a_N} f(a_1, \dots, a_N)$.

Таким образом, задача вариационного исчисления сводится к нахождению минимума функции n переменных. Алгоритмы решения этой задачи хорошо разработаны и имеются стандартные программы минимизации функции n переменных.

Для случая *квадратичных функционалов* нахождение a_1, a_2, \dots, a_N сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, как показано в следующем примере 1.

Пример 1. Найти минимум функционала:

$$\Phi[y] = \int_0^1 (0.5y'^2 + \alpha y) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Выбираем систему базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\{ \varphi_k = \sin(k\pi x), \quad k = 1 \dots N, \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0 \}.$$

Решение ищем в виде функции $y^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x)$, которая удовлетворяет граничным условиям. Производная $y'^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k k\pi \cos(k\pi x)$.

Подставляем в наш функционал и получаем целевую функцию:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_N) &= \Phi[y^N] = \int_0^1 \left(0.5 [y'^N]^2 + \alpha y^N \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(0.5\pi^2 \left[\sum_{k=1}^N a_k k \cos(k\pi x) \right]^2 + \alpha \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x) \right) dx = \\ &= 0.5\pi^2 \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N a_k a_l kl \int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(l\pi x) dx + \alpha \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 \sin(k\pi x) dx. \end{aligned}$$

Обозначим

$$c_{kl} = 0.5\pi^2 kl \int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(l\pi x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi^2 k^2 / 4, & k = l \end{cases};$$

$$b_k = \alpha \int_0^1 \sin(k\pi x) dx = \begin{cases} 0, & k \text{ четное} \\ 2\alpha / (k\pi), & k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Получим

$$f(a_1, \dots, a_N) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N a_k a_l c_{kl} + \sum_{k=1}^N a_k b_k.$$

Запишем условия экстремума функции n переменных:

$$\frac{\partial f(a_1, \dots, a_N)}{\partial a_k} = 2 \sum_{l=1}^N c_{kl} a_l + b_k = 0; \quad k = 1..N.$$

Решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений с помощью стандартной программы, получаем неизвестные значения a_1, \dots, a_N и искомую экстремаль $y^N(x)$.

Заметим, что в нашем конкретном случае матрица системы получается диагональной и решение имеет вид

$$a_k = \frac{-b_k}{2c_{kk}} = -\frac{2\alpha / (k\pi)}{2\pi^2 k^2 / 4} = -\frac{4\alpha}{(k\pi)^3}, \quad k = 1, 3, 5, \dots; \quad y^N(x) = -4\alpha \sum_{k=1(2)}^N \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^3}.$$

6.4. Элементарная задача вариационного исчисления

Наиболее полно теория решения вариационных задач разработана для частного случая функционала следующего вида:

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad y(a) = A; \quad y(b) = B. \quad (6.4)$$

Здесь $F(x, y, y')$ – непрерывная дифференцируемая функция трех переменных.

Получим для этой задачи функциональное уравнение (6.3) для нахождения экстремалей. Воспользуемся вторым определением вариации (6.2) и правилом дифференцирования сложной функции. Уравнение (6.3) примет вид

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \left. \frac{\partial \Phi[y(x) + s\delta y(x)]}{\partial s} \right|_{s=0} = \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial s} F(x, y + s\delta y(x), y' + s\delta y'(x)) \right|_{s=0} dx = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y + s\delta y(x), y' + s\delta y'(x))}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial F(x, y + s\delta y(x), y' + s\delta y'(x))}{\partial y'} \delta y'(x) \right]_{s=0} dx = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \delta y'(x) \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл, воспользовавшись правилом интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad u = \frac{\partial F}{\partial y'}; \quad dv = d(\delta y) = \delta y' dx;$$

получим

$$\int_a^b \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \delta y'(x) dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx = 0 - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx.$$

В результате имеем:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) \right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) dx = 0.$$

Последнее равенство должно выполняться для произвольной $\delta y(x) \neq 0$, что возможно только при условии

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad y(a) = A; \quad y(b) = B. \quad (6.5)$$

Или более коротко $F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$.

В результате мы получили **дифференциальное уравнение Эйлера** (6.5), которому должны удовлетворять экстремали функционала (6.4). Это уравнение в общем случае имеет второй порядок и дополняется двумя граничными условиями. Для выяснения вопроса минимум или максимум имеет место требуется дополнительное исследование второй производной на положительность. Если $F_{y'y'} > 0$, то на экстремали достигается минимум, если $F_{y'y'} < 0$ – то максимум.

Пример 2. Найти экстремаль функционала:

$$\Phi[y] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Здесь $F = y'^2 + 12xy$, $F_y = 12x$, $F_{y'} = 2y'$, $\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{d2y'}{dx} = 2y''$.

Подставляя в (6.5), получим уравнение Эйлера в виде $y'' = 6x$.

Интегрируем его, получаем

$$y(x) = x^3 + c_1x + c_2.$$

Константы подбираем используя граничные условия, получим

$$c_1 = c_2 = 0, \quad y^m(x) = x^3.$$

Проверим $F_{y'y'} = 2 > 0$, следовательно, имеет место минимум при $y = x^3$.

Пример 3. Найти минимум функционала

$$\Phi[y] = \int_0^1 (0.5y'^2 + \alpha y) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Здесь $F = \frac{1}{2}y'^2 + \alpha y$, $F_y = \alpha$, $F_{y'} = y'$, $\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{dy'}{dx} = y''$.

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' = \alpha$.

Общее решение

$$y = \frac{\alpha}{2}x^2 + c_1x + c_2.$$

Из граничных условий находим $c_2 = 0$, $\alpha/2 + c_1 = 0$ или $c_1 = -\alpha/2$.

Окончательно $y^m = \frac{\alpha}{2}(x^2 - x)$.

Если сравнить с результатом примера 1, получим

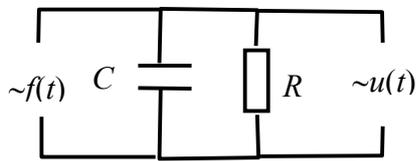
$$y^m = \frac{\alpha}{2}(x^2 - x) \approx -4\alpha \sum_{k=1(2)}^N \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^3}.$$

Вопросы и задания для проверки

1. Сформулируйте основную задачу вариационного исчисления.
2. Что такое вариация функции?
3. Сформулируйте первое определения вариации функционала.
4. Запишите второе определение вариации функционала.
5. Изложите метод Ритца нахождения минимума произвольного функционала.
6. Сформулируйте элементарную задачу вариационного исчисления.
7. Запишите уравнение Эйлера для нахождения экстремалей.

Лекция 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

7.1. Преобразование Лапласа



$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = f(t)$$

Рис. 7.1. Электрическая схема

Преобразование Фурье используется в основном для анализа сигналов. Рассмотренные ниже преобразования используются для решения дифференциальных, интегральных и разностных уравнений, которые описывают прохождение сигнала через различные фильтрующие устройства. Например, чтобы найти, как преобразует сигнал $f(t)$ сглаживающее устройство, представленное на рисунке, необходимо для сигнала $u(t)$ на выходе решить дифференциальное уравнение.

При этом надо задать начальный момент отсчета, как правило, при $t = 0$, предположить, чему равно $u(0)$ и, зная $f(t)$, рассчитать изменение сигнала $u(t)$ при $t > 0$. При решении таких линейных дифференциальных уравнений широкое применение получил так называемый операционный метод, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа.

Рассмотрим класс в общем случае комплексных функций, определенных для положительных $t > 0$ и ограниченных экспонентой $|u(t)| < ce^{\alpha t}$. Такие функции обычно используются на практике, т. к. при рассмотрении некоторого процесса, изменяющегося со временем, естественно взять за начало отсчета времени значение $t = 0$, а также считать, что процесс развивается не взрывообразно (т. е. не экспоненциально).

Для таких функций в заштрихованной на рис. 7.1 области существует конечный интеграл:

$$F(p) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt, \quad p = p_{re} + ip_{im}, \quad p_{re} > \alpha, \quad (7.1)$$

причем функция $F(p)$ является аналитической (т. е. дифференцируемой бесконечное число раз). Таким образом, (7.1) представляет интегральный оператор $Lu(t) = F(p)$, который опре-

Рис. 7.2. Область определения преобразования Лапласа

деляет **преобразование Лапласа**, широко используемое в практических приложениях.

Для пространства функций $\{\dots u(t)\dots; |u(t)| < ce^{\alpha t}\}$ множество $\{\dots F(p)\dots; p_{re} > \alpha\}$ представляет **пространство образов** преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа является некоторой модификацией преобразования Фурье – оно превращается в преобразование Фурье, если задать $p = i\omega t$. Для него также существует обратное преобразование.

Обратное преобразование Лапласа $L^{-1}F(p) = u(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad \forall \gamma > \alpha. \quad (7.2)$$

Нас интересует, как с помощью этого преобразования можно решать дифференциальные уравнения. Поэтому сразу найдем, как преобразование Лапласа действует на производную.

Найдем **преобразование Лапласа от производной** $Lu'(t)$:

$$Lu'(t) = \int_0^{\infty} u'(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} du(t) = u(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt = -u(0) + pF(p).$$

Для второй производной получим

$$\begin{aligned} Lu''(t) &= \int_0^{\infty} u''(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} du'(t) = u'(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} u'(t)e^{-pt} dt = \\ &= -u'(0) - pu(0) + p^2F(p). \end{aligned}$$

Действуя аналогично, получаем преобразование Лапласа для производной любого порядка:

$$Lu^{(n)}(t) = \int_0^{\infty} u^{(n)}(t)e^{-pt} dt = p^n F(p) - u^{(n-1)}(0) - pu^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1}u(0). \quad (7.3)$$

Формула (7.3) лежит в основе **операционного исчисления** – методики решения многих задач с начальным условием (для дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных уравнений) путем их сведения к задачам над образами.

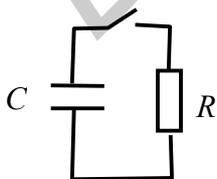


Рис. 7.3. Разрядка конденсатора

Проиллюстрируем эту методику на простейшем примере решения задачи Коши (задачи с начальным условием при $t = 0$) для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решим дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{du}{dt} + au = 0; \quad u(0) = 1; \quad a = \frac{1}{CR}. \quad (7.4)$$

Это уравнение описывает, как изменяется напряжение на обкладках в начале заряженного конденсатора после подключения сопротивления (рис. 7.3).

Применим к нему преобразование Лапласа:

$$L\left(\frac{du}{dt} + au\right) = L\left(\frac{du}{dt}\right) + L(au) = -u(0) + pF(p) + aF(p) = -1 + (p+a)F(p) = 0.$$

Как видим, вместо дифференциального уравнения мы получили алгебраическое, из которого легко находим образ искомого решения:

$$-1 + (p+a)F(p) = 0 \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p+a}.$$

Теперь для нахождения искомого решения достаточно найти обратное преобразование (7.2) для $1/(p+a)$. Но взять интеграл (7.2) порой слишком затруднительно. Поэтому для преобразования Лапласа имеются довольно подробные таблицы образов многих нужных функций.

Покажем, как они получаются, и заодно решим нашу задачу. Многие функции могут быть представлены в ряд Тейлора:

$$u(t) = u(0) + u'(0)\frac{t}{1!} + \dots + u^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}.$$

Поэтому для начала найдем образ от функции вида $u(t) = \frac{t^n}{n!}$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} de^{-pt} = \frac{1}{-p} \frac{t^n}{n!} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-pt} dt = \\ &= 0 + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{-pt} dt \dots = \frac{1}{p^n} \int_0^{\infty} \frac{t^0}{(0)!} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^n} \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, многие функции $F(p)$ могут быть представлены в виде разложения по степеням $1/p$. Это дает возможность получать образы многих функций.

Например, возьмем следующее разложение функции в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

и подставим $x = a/p$, получим

$$\frac{1}{1+a/p} = 1 - \frac{a}{p} + \frac{a^2}{p^2} - \dots + (-1)^n \frac{a^n}{p^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{p^n}.$$

Теперь представим нашу функцию $1/(p + a)$, получившуюся как образ решения ДУ в виде ряда по степеням $1/p$:

$$F(p) = \frac{1}{p+a} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+a/p} = \frac{1}{p} - \frac{a}{p^2} + \frac{a^2}{p^3} - \dots + (-1)^n \frac{a^n}{p^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{p^{n+1}}.$$

Возьмем от полученного ряда обратное преобразование:

$$L^{-1}F(p) = L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{p^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n L^{-1} \left(\frac{1}{p^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n t^n}{n!} = e^{-at}.$$

В результате получим искомое решение: $u = e^{-at}$. Прямой подстановкой убеждаемся, что оно удовлетворяет нашему уравнению и граничному условию.

Если вспомнить, что функция Бесселя представима в виде степенного ряда, то аналогично находится **оригинал от функции Бесселя**:

$$LJ_0(t) = \int_0^{\infty} J_0(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

В книге Андре Анго (Математика для электро- и радиоинженеров. – М. : Наука, 1964.) приведена таблица, содержащая образы преобразования Лапласа для 100 функций. Ее использование позволяет решить множество инженерных задач.

7.2. Сеточные функции и разностные уравнения

7.2.1. Понятие сеточной функции

Рассмотрим, как решается методом сеток вышерассмотренная задача Коши:

$$\frac{du}{dt} + au = 0; \quad u(0) = u^0.$$

В этом случае на области решения $0 \leq t \leq T$ вводится набор точек (узлов), называемых **сеткой**:

$$\{t_0 = 0, t_1 = \tau, t_2 = 2\tau, \dots, t_n = n\tau = T, \tau = T/n\}.$$

Значения искомой функции в узлах сетки обозначаются как $\{\dots u_k = u(t_k) \dots\}$ (рис. 7.4). Теперь, вместо того чтобы искать решение в виде некоторой функции, будем находить таблицу ее значений в узлах достаточно подробной (малое τ) сетки.

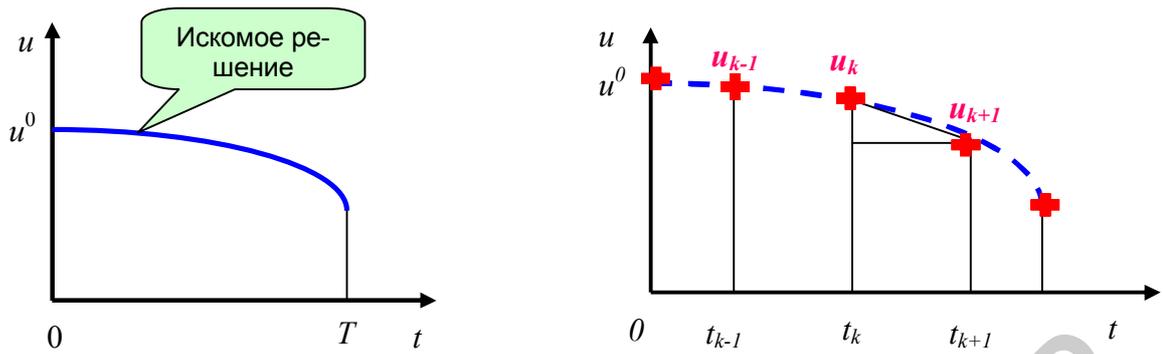


Рис. 7.4. Иллюстрация метода сеток

Для этого заменим производную в каждом узле сетки конечной разностью, получим систему алгебраических уравнений, которая называется конечноразностной схемой, или **разностным уравнением**:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + a u_k = 0; \quad u_0 = u^0.$$

Перепишем это уравнение, выразив явно u_{k+1} :

$$u_{k+1} = (1 - a\tau)u_k; \quad u_0 = u^0.$$

Теперь понятно, как находить все значения u_k :

$$u_1 = (1 - a\tau)u^0; \quad u_2 = (1 - a\tau)^2 u^0; \quad \dots u_n = (1 - a\tau)^n u^0.$$

Так как $\tau = T/n$, получаем известный золотой предел:

$$u_n = \left(1 - \frac{aT}{n}\right)^n u^0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^0 e^{-aT}.$$

Таким образом, решение по методу сеток приводит к точному решению при измельчении сетки.

Мы видим, что неизвестные образуют последовательность пронумерованных чисел, которую будем обозначать: $\{\dots u(k)\dots; k = 0, 1, 2, \dots, n\}$. Эту последовательность можно считать функцией u , заданной в точках сетки, или просто **сеточной функцией**.

С такой же ситуацией мы встречаемся при оцифровке непрерывного сигнала $s(t)$. Выбираем некий шаг дискретизации по времени и получаем набор пронумерованных последовательно его значений $\{\dots s(k)\dots; k=0, 1, 2, \dots, n\}$, т. е. сеточную функцию.

Сигнал при его обработке проходит ряд устройств – суммирующих, дифференцирующих, интегрирующих. Поэтому в теории сигналов большую роль играют разностные уравнения.

7.2.2. Разностные уравнения для сеточных функций и их решения

В общем виде рассмотренное выше разностное уравнение **первого порядка** и начальное условие к нему можно записать

$$a_0 u(k+1) + a_1 u(k) = f(k), \quad u(0) = u^0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.5)$$

Если по аналогии строить разностное уравнение для дифференциального уравнения второго порядка, например, $u'' + au' + bu = f$; $u(0) = u^0$; $u'(0) = d u^0$ то получим разностное уравнение **второго порядка**:

$$a_0 u(k+2) + a_1 u(k+1) + a_2 u(k) = f(k+1). \quad (7.6)$$

Для него можно поставить как начальное условие

$$u(0) = u^0, \quad u(1) = u^1; \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

так и **краевую задачу**:

$$u(0) = u^0, \quad u(n) = u^n.$$

Если решение задачи для неоднородного уравнения с начальным условием сводится к элементарному вычислению членов рекуррентной последовательности, как мы это проделали для уравнения первого порядка, то решение краевых задач зачастую требует значительных усилий.

Аналогично записываются разностные уравнения более высокого порядка. В этих уравнениях $u(k)$ неизвестная сеточная функция. Если $f(k) \equiv 0$, то уравнение называется **однородным**.

Проиллюстрируем теорию решения разностных уравнений на примере вышеприведенного уравнения второго порядка.

Решение однородных разностных уравнений ищется следующим образом. Будем находить общее решение (7.6) в виде $u(k) = \lambda^k$, где $\lambda \neq 0$ некоторое число. Тогда $u(k+1) = \lambda^{k+1}$, $u(k+2) = \lambda^{k+2}$. Подставим эти выражения в решаемое уравнение (7.6), получим **характеристическое уравнение**

$$a_0 \lambda^{k+2} + a_1 \lambda^{k+1} + a_2 \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda^k (a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0,$$

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (7.7)$$

Таким образом, сеточная функция $u(k) = \lambda^k$ является решением разностного уравнения, если λ есть корень **характеристического уравнения** (7.7).

При этом возможны три случая:

- 1) уравнение имеет два различных действительных корня: λ_1, λ_2 ;
- 2) корни различны, но комплексные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta = r e^{i\varphi}$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta = r e^{-i\varphi}$;
- 3) корни кратные: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В случае 1 имеется два независимых частных решения, и общее решение имеет вид

$$u(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k.$$

В случае 2 также имеется два независимых частных решения, и общее решение имеет вид

$$u(k) = r^k (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi).$$

В случае 3 корень имеет кратность 2, два независимых решения, и общее решение имеет вид

$$u(k) = c_1 \lambda^k + c_2 k \lambda^k.$$

Заметим, что если хотя бы для одного из корней $|\lambda| > 1$, то при расчете большого числа значений сеточной функции возникает проблема устойчивости расчета из-за того, что погрешность округлений начинает накапливаться от итерации к итерации.

Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет сумму общего однородного и частного решения неоднородного. Как указывалось выше, найти такое частное решение можно, решив задачу с начальным условием, используя рекуррентные соотношения.

Поэтому, получив общее решение, необходимо подобрать его свободные коэффициенты таким образом, чтобы с учетом полученного частного решения неоднородного уравнения удовлетворить граничным условиям.

В некоторых ситуациях при решении таких уравнений может быть полезно использование дискретного Z -преобразования, которое получается как адаптация вышерассмотренного преобразования Лапласа на сеточные функции.

7.3. Дискретное Z -преобразование: определение и основные свойства

Пусть $u(k)$, $k \geq 0$ – сеточная функция. Линейный оператор $Zu(k)$, отображающий пространство сеточных функций на множество функций комплексного переменного $p = p_{re} + ip_{im}$ по правилу

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k)}{p^k}; \quad u(k) \leftrightarrow F(p) \quad (7.10)$$

называется **Z -преобразованием**, или **преобразованием Лорана** сеточной

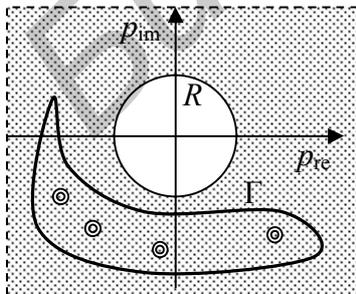


Рис. 7.5. Область определения Z -преобразования

функции. Известно, что преобразование существует для $|p| > \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|u(k)|} = R$, т. е. в заштрихованной области на рис. 7.5.

В этой области функция $F(p)$ является аналитической и существует обратное преобразование $Z^{-1}F(p)$:

В этой области функция $F(p)$ является аналитической и существует обратное преобразование $Z^{-1}F(p)$:

$$u(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(p) p^{k-1} dp. \quad (7.11)$$

Интеграл берется по произвольному замкнутому контуру Γ в области сходимости, охватывающему все полюсы функции $F(p)$ (рис. 7.5).

Заметим, что все **свойства** преобразования Лапласа переносятся на Z -преобразование. В книге Р. М. Жевняк, А. А. Карпук (Высшая математика. Ч. 5. – Минск : Выш. шк., 1988) приведена достаточно подробная таблица сеточных функций и их Z -образов.

Рассмотрим свойства Z -преобразования, позволяющие эффективно решать разностные уравнения.

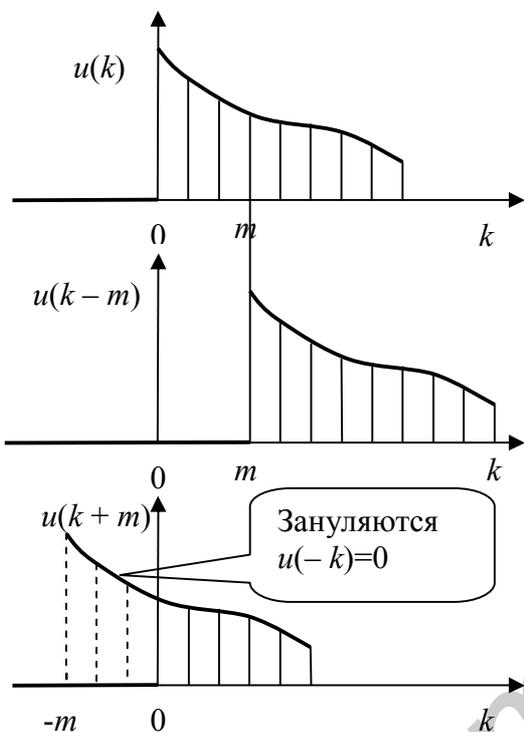


Рис. 7.6. Графики функций

решать разностные уравнения.

Рис. 7.6 иллюстрирует рассматриваемые случаи.

1. Запаздывание аргумента:

$$Zu(k-m) = \frac{1}{p^m} F(p).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} Zu(k-m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k-m)}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k-m)}{p^m p^{k-m}} = \\ &= \frac{1}{p^m} \sum_{k-m=n=0}^{\infty} \frac{u(n)}{p^n} = \frac{1}{p^m} F(p), \end{aligned}$$

так как $u(-k)=0$.

2. Опережение аргумента

$$Zu(k+m) = p^m F(p) - \sum_{n=0}^{m-1} u(n) p^{m-n}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} Zu(k+m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k+m)}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(k+m)}{p^{-m} p^{k+m}} = \\ &= p^m \left(\sum_{k+m=n=m}^{\infty} \frac{u(n)}{p^n} \pm \sum_{n=0}^{m-1} \frac{u(n)}{p^n} \right) = p^m F(p) - p^m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{u(n)}{p^n} = p^m F(p) - \sum_{n=0}^{m-1} p^{m-n} u(n). \end{aligned}$$

Свойства 1, 2 являются аналогом преобразования Лапласа от производной. С их помощью можно решать разностные уравнения по следующей схеме.

Вначале применяем к обеим частям разностного уравнения Z -преобразование и получаем функциональное уравнение. Решаем уравнение, получаем Z -образ искомого решения. Затем применяем обратное преобразование и получаем искомое решение в виде сеточной функции.

Пример 1. Решить однородное уравнение

$$u(k+2) - 2u(k+1) + u(k) = 0; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0.5.$$

Сначала решим это уравнение с помощью характеристического уравнения. Составляем характеристическое уравнение:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Корень кратный, следовательно, общее решение имеет вид

$$u(k) = c_1\lambda^k + c_2k\lambda^k = c_1 + c_2k.$$

Используя начальные условия, находим c_1, c_2 :

$$u(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$u(1) = c_1 + c_2 \cdot 1 = 0 + c_2 = 0.5 \Rightarrow c_2 = 0.5.$$

В результате получаем решение $u(k) = 0.5k$.

Попробуем найти, чему равно Z -преобразование от полученной сеточной функции $u(k) = k$: $Zk = F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{p^k}$, сделаем замену $x = 1/p$, получим степен-

ной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{p^k} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, похожий на ряд Тейлора функции $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$,

для которой производные: $\left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=0} = k! \cdot k$. Оказывается, такой функцией явля-

ется $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, следовательно, переходя к p , получим

$$Zk = F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{p^k} = \frac{p}{(p-1)^2}.$$

Теперь решим это уравнение, используя Z -преобразование.

$$Z[u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)] = Z[u(k+2)] - 2 \cdot Z[u(k+1)] + Z[u(k)] =$$

$$= [p^2 F(p) - p^2 u(0) - pu(1)] - 2 \cdot [pF(p) - pu(0)] + F(p) = 0;$$

$$F(p) \cdot [p^2 - 2p + 1] = p^2 u(0) + pu(1) - 2pu(0);$$

$$F(p) = \frac{p^2 u(0) + pu(1) - 2pu(0)}{p^2 - 2p + 1} = \frac{0.5p}{p^2 - 2p + 1} = \frac{0.5p}{(p-1)^2}.$$

Осталось применить обратное преобразование и получить решение:

$$Z^{-1} F(p) = Z^{-1} \frac{0.5p}{(p-1)^2} = 0.5k .$$

Заметим, что исходное разностное уравнение получено при решении методом сеток задачи Коши для дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.5; \Rightarrow u(t) = 0.5 \cdot t .$$

Вопросы и задания для проверки

1. Запишите интегральный оператор преобразования Лапласа и укажите область его определения.
2. Запишите, чему равно преобразование Лапласа от первой и второй производной.
3. Решите задачу Коши $\frac{du}{dt} + au = 0; \quad u(0) = 1$, используя операционное исчисление.
4. Как решается эта задача методом сеток?
5. Решите разностное уравнение второго порядка

$$u(k+2) - 2u(k+1) + u(k) = 0; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0.5$$

с помощью характеристического уравнения.

6. Решите это же разностное уравнение второго порядка с помощью Z-преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневиц, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневиц, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2003. – 329 с.
2. Коллатц, Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 447 с.
3. Колобов, А. М. Избранные главы высшей математики. Специальные функции. В 2 ч. / А. М. Колобов, Л. П. Черенкова. – Минск : Выш. шк., 1967. Ч. 2. – 295 с.
4. Ефимов, А. В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа / А. В. Ефимов, Ю. Г. Золотарев, В. М. Терпигорева. – М. : Выш. шк., 1980. – 296 с.
5. Князев, П. Н. Интегральные преобразования / П. Н. Князев. – М. : УРСС, 2004. – 197 с.
6. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1988. – Ч. 5. – 253 с.
7. Краснов, М. Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. – М. : Наука, 1973. – 191 с.
8. Сеницын, А. К. Современные информационные технологии. Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики / А. К. Сеницын. Конспект лекций для аспирантов и магистрантов БГУИР. – Минск : БГУИР, 2004. – 54 с.
9. Сеницын, А. К. Алгоритмы вычислительной математики / А. К. Сеницын, А. А. Навроцкий : учеб.-метод. пособие по курсу «Основы алгоритмизации и программирования». – Минск : БГУИР, 2007. – 79 с.
10. Специальные математические методы и функции / Р. М. Жевняк [и др.]. – ЭУМКД кафедры высшей математики БГУИР. – 2009. – Режим доступа : <http://abitur.bsuir.by/index.jsp?resID=116608>.

Учебное издание

Синицын Анатолий Константинович

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *И. В. Ничипор*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет *А. А. Лысеня*

Подписано в печать 26.09.2013. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л.

Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 100 экз. Заказ 656.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.

220013, Минск, П. Бровки, 6