ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Гриб Д.В., Сасковец А.В.

Ткаченко А.П. – канд. техн. наук, доцент

Обычно теорему отсчетов обосновывают и объясняют на частотном языке, однако процессы дискретизации аналогового сигнала и его восстановления по дискретным отсчетам удобно и наглядно математически описывать и на временном языке с помощью разложения сигнала в ряд Котельникова.

Будем полагать, что аналоговый сигнал (в качестве примера возьмем телевизионный) дискретизируется с шагом Δt, который в соответствии с теоремой Котельникова – Найквиста равен $\Delta t = \text{Т}_\text{Д} \le 1/2F$. Пусть выполняется теоретический предел (рис. 1, а)

$$\Delta t = \text{Т}_\text{Д} = 1/2F\ , \quad (1)$$

где F – частота среза идеального ФНЧ на входе дискретизатора, которая и определяет высшую частоту спектра дискретизируемого сигнала.

Временное представление сигнала $U(t)$ связано с комплексным спектром $S(\omega)$ преобразованием Фурье. Учтем, что спектр $S(\omega)$ ограничен значениями $-F...+F$, т.е. полосой $2F$ и отличен от нуля $S(\omega) \ne 0$ при $-2\pi F \le \omega \le 2\pi F$ и равен нулю $S(\omega) = 0$ при $|\omega| > 2\pi F$:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega\ . \quad (2)$$

Сначала найдем значение сигнала в дискретные моменты времени $U(k/2F)$, а затем получим формулу для спектра $S(\omega)$, выраженного через отсчетные значения $U(k/2F)$, и подставим ее в (2). Определим функцию $U(t)$ для дискретных моментов времени $t = k/2F = k\text{Т}_\text{Д},\ k = 1, 2, 3...$, следующих с шагом (1):

$$U(k/2F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} S(\omega) e^{j\omega(k/2F)} d\omega\ . \quad (3)$$

Поскольку комплексный спектр задан на отрезке от $-F$ до $+F$, его можно представить комплексным рядом Фурье

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{-j\omega(k/2F)}, \quad (4) \qquad \text{где } C_\kappa = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2F}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} S(\omega) e^{j\omega(k/2F)} d\omega\ . \quad (5)$$

Сравнивая (5) и (3), видим, что коэффициенты разложения C_k пропорциональны отсчетам функции $U(t)$ в дискретные моменты времени. Тогда сумма (4) выражается через отсчеты исходной функции

$$S(\omega) = \frac{1}{2F}\sum_{-\infty}^{\infty} U(k/2F) e^{-j\omega(k/2F)}\ . \quad (6)$$

Это значение спектра подставим в (2) для определения исходной функции в любой момент времени, тогда

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2F}\int_{-2\pi F}^{2\pi F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} U(k/2F) e^{-j\omega(k/2F)}\right\} e^{j\omega t} d\omega\ . \quad (7)$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования и, произведя интегрирование по круговой частоте ω, получим

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2F}\sum_{-\infty}^{\infty} U(k/2F)\int_{-2\pi F}^{2\pi F} e^{j\omega(t-k/2F)} d\omega\ . \quad (8)$$

Найдем значение интеграла

$$\int_{-2\pi F}^{2\pi F} e^{j\omega(t-k/2F)} d\omega = \frac{1}{j(t-k/2F)} e^{j\omega(t-k/2F)}\Big|_{-2\pi F}^{2\pi F} = \frac{\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau}{j\tau}\Big|_{-2\pi F}^{2\pi F} =$$

$$= \frac{\cos 2\pi F\tau + j\sin 2\pi F\tau - \cos(-2\pi F\tau) - j\sin(-2\pi F\tau)}{j\tau} = \frac{j2\sin 2\pi F\tau}{j\tau}, \quad (9)$$

где $\tau = t - k/2F$. (10)

Подставляя (9) в (8), получим

$$U(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}U(k/2F)\frac{\sin 2\pi F(t-k/2F)}{2\pi F(t-k/2F)}=U_1(t)+U_2(t)+U_3(t)+\ldots\,. \qquad (11)$$

Зависимость (11) представляет аналитическую запись теоремы отсчетов: любая функция времени $U(t)$ с ограниченным значением F спектром может быть представлена в виде бесконечной суммы, члены которой представляют собой произведение

$U(k/2F)$ – отсчетов и $(\sin 2\pi F\tau)/2\pi F\tau$ – функции отсчетов. (12)

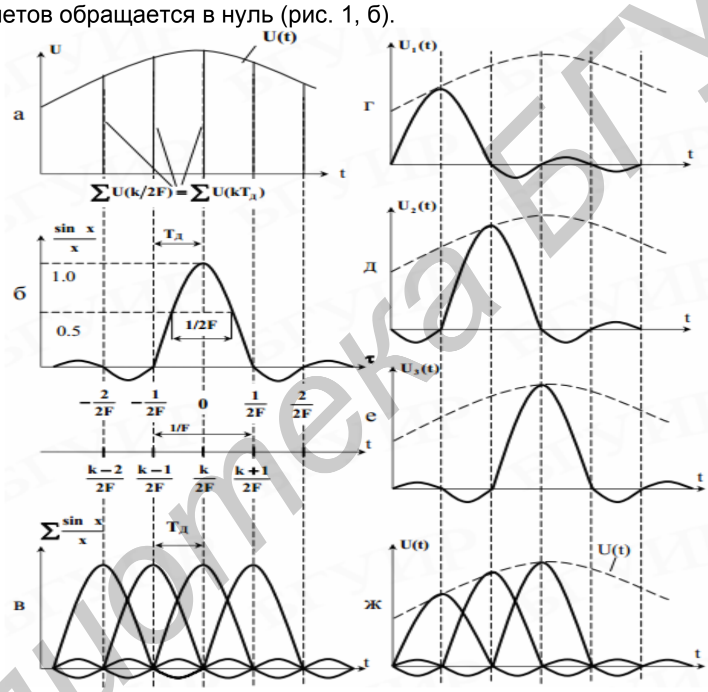
С учетом (10) начало координат в функции отсчетов смещено в точку $k/2F$, тогда при $\tau\to 0$ из (12) следует неопределенность $\sin 0/0$ для функции отсчетов. После ее раскрытия путем взятия производных имеем

$$\lim_{\tau\to 0}\Big[(\sin 2\pi F\tau)'\big/(2\pi F\tau)'\Big]=\lim_{\tau\to 0}\big[(2\pi F\cos 2\pi F\tau)/2\pi F\big]\to 1\,. \qquad (13)$$

Таким образом, в момент времени $t=k/2F$ функция отсчетов принимает максимальное значение, равное 1, а в моменты времени $t=(k\pm\nu)/2F$ при $\nu=1,2,3,\ldots$ следующее:

$$\sin\big[2\pi F((k+1)/2F-k/2F)/2\pi F((k+1)/2F-k/2F)\big]=\sin\pi/\pi\,,$$

т.е. функция отсчетов обращается в нуль (рис. 1, б).



а – аналоговый и дискретный сигналы; б, в – отклик идеального ФНЧ на δ – импульс и сумму δ – импульсов с шагом $T_Д$; г, д, е – осциллограммы сигналов – слагаемых ряда; ж – восстановленный сигнал

Рис. 1 – Разложение сигнала в ряд Котельникова

Ширина главного лепестка функции отсчетов на нулевом уровне равна $1/F$, а на уровне 0,5 – $1/2F$. Отсюда следует, что минимальная длительность импульса по нулевому уровню, который может существовать на выходе селективной системы, например ФНЧ с $f_{ср}=F$, равна $1/F$. Напомним, что речь идет об идеальном ФНЧ, который нереализуем.

Следовательно, при воздействии суммы δ – импульсов с шагом $T_Д$ на ФНЧ на его выходе получается постоянное напряжение (рис. 1, в). После дискретизатора амплитудные значения δ – импульсов будут пропорциональны мгновенным амплитудам аналогового сигнала в дискретные моменты времени, а после ФНЧ – огибающая $U(t)$ (рис. 1, ж) будет повторять форму аналогового сигнала (т.е. равна сумме $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ и т.д. на рис. 1, г-е), что наглядно показывает физический смысл разложения $U(t)$ в ряд Котельникова (11).

Список использованных источников:

1. Ткаченко, А. П. Цифровое представление сигналов изображения и звукового сопровождения: учеб. пособие / А. П. Ткаченко, П. А. Капуро, А. Л. Хоминич. – Минск: БГУИР. – 2003. – 56с.