

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет радиоэлектроники

Кафедра информационных радиотехнологий

***МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ***

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для специальностей 1-39 01 02 «Радиоэлектронные системы»
и 1-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации»*

Минск БГУИР 2016

УДК 621.391(076.5)

ББК 32.811я73

М54

А в т о р ы:

И. Н. Давыденко, И. Г. Давыдов, Т. А. Дубновицкая, А. В. Цурко

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра радиолокации и приемопередающих устройств
учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»
(протокол №29 от 11.06.2015);

кафедра информационных радиотехнологий
учреждения образования «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
(протокол №11 от 25.05.2015);

докторант государственного учреждения «Научно-исследовательский
институт Вооруженных Сил Республики Беларусь»,
кандидат технических наук А. В. Гринкевич

М54 **Методы и средства цифровой обработки сигналов.**
Лабораторный практикум. В 2 ч. Ч. 1 : Методы цифровой обработки
сигналов : учеб.-метод. пособие / И. Н. Давыденко [и др.]. – Минск :
БГУИР, 2016. – 70 с. : ил.

ISBN 978-985-543-220-4 (ч. 1).

Учебно-методическое пособие состоит из двух частей. Первая часть «Методы цифровой обработки сигналов» включает четыре лабораторные работы, в которых рассматриваются линейные дискретные системы и принципы их моделирования, свойства дискретного преобразования Фурье, алгоритмы вычисления сверток сигналов и методы спектрального анализа сигналов. Каждая работа содержит краткие теоретические сведения, методические рекомендации и варианты заданий.

УДК 621.391(076.5)

ББК 32.811я73

ISBN 978-985-543-220-4 (ч. 1)

ISBN 978-985-543-219-8

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Лабораторная работа №1. Моделирование линейных дискретных систем	5
Лабораторная работа №2. Исследование свойств дискретного преобразования Фурье	32
Лабораторная работа №3. Алгоритмы вычисления сверток сигналов	47
Лабораторная работа №4. Цифровые методы спектрального анализа сигналов.....	57
Литература	69

Библиотека БГУИР

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие «Методы и средства цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум» предназначено для выполнения лабораторных работ студентами радиотехнических специальностей. Первая часть посвящена методам цифровой обработки сигналов (ЦОС), включает четыре лабораторные работы. Каждая работа содержит краткие теоретические сведения, дополненные ссылками на источники литературы, руководство по применению программного инструментария и выполнению лабораторной работы, варианты индивидуальных заданий.

В качестве программных средств используется вычислительная среда MATLAB с включенными в стандартный комплект пакетами, установленная на персональном компьютере под управлением ОС Windows.

В первой лабораторной работе рассматриваются основы работы со средой MATLAB, описываются линейные дискретные системы и принципы их моделирования. Во второй работе исследуются свойства дискретного преобразования Фурье. В третьей работе рассматриваются алгоритмы вычисления сверток сигналов, в четвертой – цифровые методы спектрального анализа сигналов.

Таким образом, учебно-методическое пособие содержит все необходимые теоретические сведения и методические рекомендации для освоения на практике методов ЦОС студентами специальностей «Радиоэлектронные системы» и «Радиоэлектронная защита информации» согласно учебной программе.

Лабораторная работа №1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Цель работы

1. Исследование линейных разностных уравнений и Z -преобразований.
2. Ознакомление со средой математического моделирования MATLAB.
3. Моделирование линейных дискретных систем в среде MATLAB.

1.1. Краткие теоретические сведения

1.1.1. Введение в MATLAB

MATLAB (Matrix Laboratory) – одна из старейших систем автоматизации математических расчетов, построена на базе расширенного представления и применении матричных операций (действий над многомерными массивами).

MATLAB – это высокопроизводительный язык для технических расчетов, включающий вычисления, визуализацию и программирование в удобной среде, где задачи и решения выражаются в форме, близкой к математической. Типичное использование MATLAB:

- математические вычисления;
- создание алгоритмов;
- моделирование;
- анализ данных, исследования и визуализация;
- научная и инженерная графика;
- разработка приложений, включая создание графического интерфейса.

В MATLAB важная роль отводится специализированным группам, называемым *toolboxes*. Они очень важны для большинства пользователей MATLAB, так как позволяют изучать и применять специализированные методы. *Toolboxes* – это всесторонняя коллекция функций MATLAB, которые позволяют решать частные классы задач. *Toolboxes* применяются для обработки сигналов, систем контроля, нейронных сетей, нечеткой логики, вейвлетов, моделирования и т. д.

Система MATLAB состоит из пяти основных частей.

1. *Язык MATLAB* – это язык матриц и массивов высокого уровня с управлением потоками, функциями, структурами данных, вводом-выводом и особенностями объектно-ориентированного программирования. Это позволяет программировать как в «небольшом масштабе» для быстрого создания черновых программ, так и в «большом» для создания больших сложных приложений.

2. *Среда MATLAB* – это набор инструментов и приспособлений, с которыми работает пользователь или программист MATLAB. Она содержит средства для управления переменными в рабочем пространстве MATLAB,

вводом-выводом данных, а также для создания, контроля и отладки рабочих программ в MATLAB.

3. *Управляемая графика* – это графическая система MATLAB, которая включает команды высокого уровня для визуализации двух- и трехмерных данных, обработки изображения, анимации и иллюстрированной графики. Она также включает команды низкого уровня, позволяющие полностью редактировать внешний вид графики так же, как при создании графического пользовательского интерфейса для MATLAB-приложений.

4. *Библиотека математических функций* – это обширная коллекция вычислительных алгоритмов от элементарных функций до более сложных преобразований.

5. *Программный интерфейс* – это библиотека, позволяющая писать программы на Си и Фортране, которые взаимодействуют с MATLAB, включает средства для вызова программы из MATLAB (динамическая связь), вызывая MATLAB как вычислительный инструмент для чтения-записи М-файлов.

Начало работы с MATLAB

После запуска MATLAB на экране появится основное окно системы MATLAB, показанное на рис. 1.1 (указаны и подписаны необходимые и часто используемые окна и ярлыки).

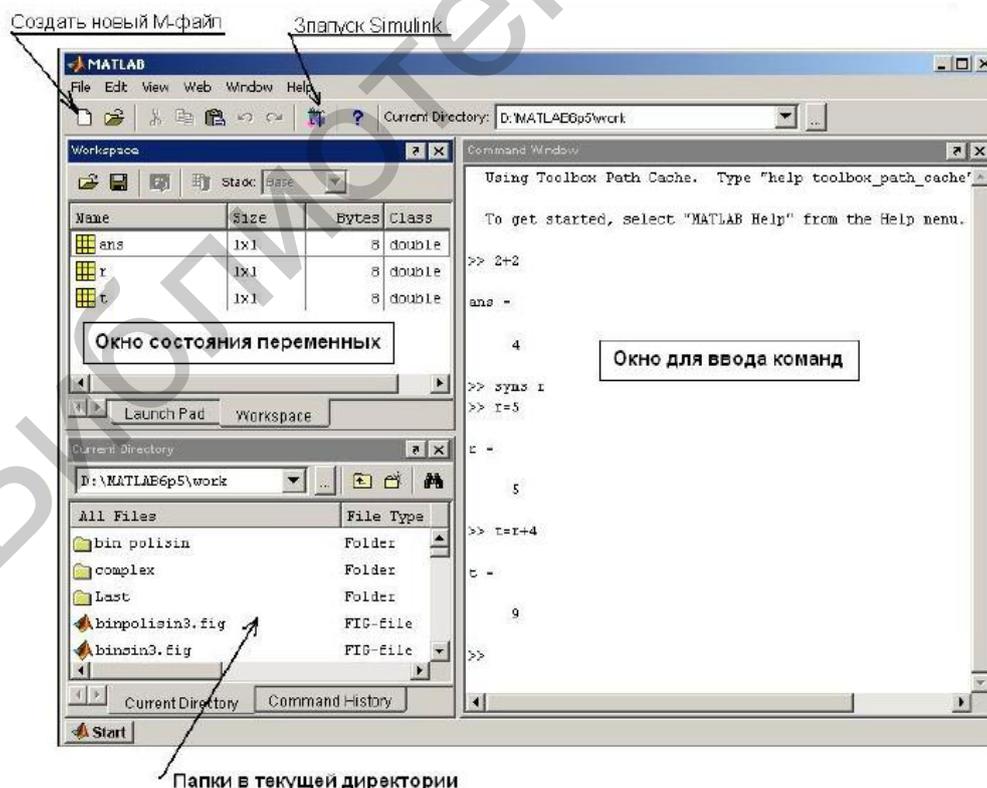
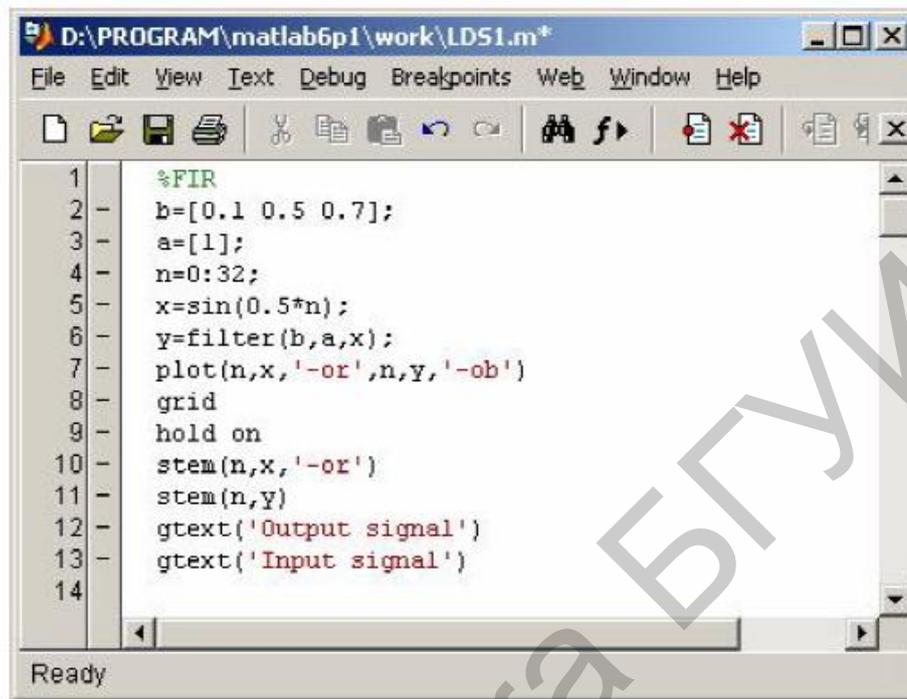


Рис. 1.1. Окно системы MATLAB после запуска и выполнения простых вычислений

Замечание. Для дальнейшей работы необходимо создать новый М-файл. Как в окне Command Windows, так и в М-файле можно записывать команды для вычисления. Расчеты сохранять можно в М-файле. На рис. 1.2 показан новый М-файл.



```
D:\PROGRAM\matlab6p1\work\LDS1.m*
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[Icons]
1 %FIR
2 b=[0.1 0.5 0.7];
3 a=[1];
4 n=0:32;
5 x=sin(0.5*n);
6 y=filter(b,a,x);
7 plot(n,x,'-or',n,y,'-ob')
8 grid
9 hold on
10 stem(n,x,'-or')
11 stem(n,y)
12 gtext('Output signal')
13 gtext('Input signal')
14
Ready
```

Рис. 1.2. М-файл

Замечание. Имя файла должно содержать латинские символы, цифры, следующие непосредственно после латинских символов или через знак подчеркивания, например: Lb.m; Lb1.m; Lb_1.m; My_Lb_1.m.

1.1.2. Описание линейных дискретных систем

Уравнения в конечных разностях

Математическое моделирование обработки сигналов линейной дискретной системой (ЛДС) включает:

- расчет характеристик ЛДС во временной области;
- расчет реакции ЛДС на входное воздействие во временной области.

ЛДС описывает соотношения между входом и выходом в виде уравнения или системы уравнений, позволяющих вычислить реакцию на заданное воздействие.

Во временной области ЛДС описывается уравнением в конечных разностях или разностным уравнением (РУ), имеющим вид

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]x[n-i] - \sum_{m=0}^{M-1} a[m]y[n-m], \quad (1.1)$$

которое задается вектором коэффициентов воздействия \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = [b[0], b[1], b[2], b[3], \dots, b[i], b[N-1]]$$

и вектором коэффициентов реакции \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = [a[0], a[1], a[2], \dots, a[m], a[M-1]].$$

Замечание. Первый элемент вектора \mathbf{a} всегда равен 1: $a[0] = 1$. Если это условие не выполняется, то необходимо произвести нормировку векторов \mathbf{b} и \mathbf{a} по $a[0]$.

Для выражения (1.1) $x[n]$ является входным воздействием на ЛДС, а $y[n]$ – реакцией ЛДС на заданное воздействие, n – дискретные отсчеты времени.

Выходной сигнал $y[n]$ можно определить с помощью формулы свертки:

$$y[n] = \sum_{i=1}^n h[i] \cdot x[n-i], \quad (1.2)$$

где импульсная характеристика $h[i]$ задается в виде вектора конечной последовательности.

Разностное уравнение (РУ) описывает работу некоторого фильтра, который можно рассматривать как произвольную систему обработки дискретного сигнала, обладающего свойствами линейности и стационарности.

Уравнение (1.2) описывает сигнал $y[n]$ на выходе фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ), вид которого показан на рис. 1.3.

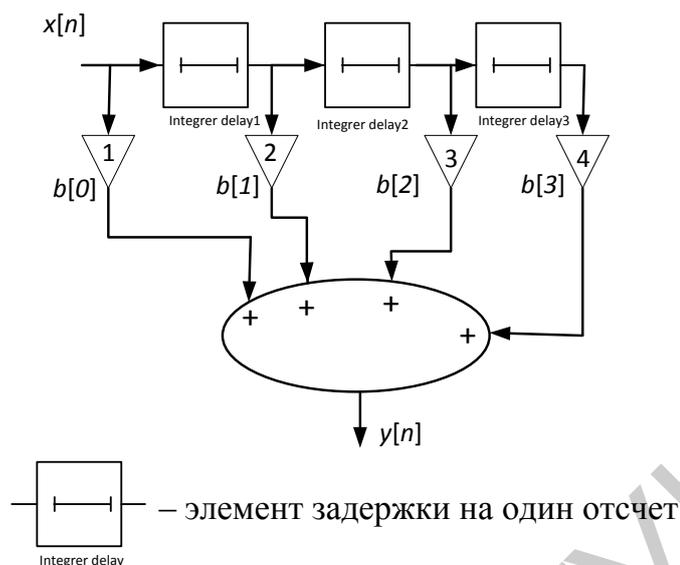


Рис. 1.3. Цифровой нерекурсивный фильтр 3-го порядка

Пример 1.1. Найдем реакцию $y[n]$ ЛДС (см. рис. 1.3) на входное воздействие $x[n]$. Входное воздействие и вектор коэффициентов воздействия имеют следующие значения: $x = [2 \ 4 \ 1 \ 5]$, $b = [4 \ 1 \ 3 \ 6]$.

Решение. Подадим на вход ЛДС входное воздействие и вычислим последовательно реакцию на выходе:

$$\begin{aligned}
 y[0] &= x[0] \cdot b[0] = 2 \cdot 4 = 8; \\
 y[1] &= x[1] \cdot b[0] + x[0] \cdot b[1] = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 18; \\
 y[2] &= x[2] \cdot b[0] + x[1] \cdot b[1] + x[0] \cdot b[2] = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14; \\
 y[3] &= x[3] \cdot b[0] + x[2] \cdot b[1] + x[1] \cdot b[2] + x[0] \cdot b[3] = \\
 &= 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 45; \\
 y[4] &= x[3] \cdot b[1] + x[2] \cdot b[2] + x[1] \cdot b[3] = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 32; \\
 y[5] &= x[3] \cdot b[2] + x[2] \cdot b[3] = 5 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 21; \\
 y[6] &= x[3] \cdot b[3] = 5 \cdot 6 = 30.
 \end{aligned}$$

Уравнение (1.1) позволяет определить выходной сигнал $y[n]$ на выходе фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ), вид которого показан на рис. 1.4.

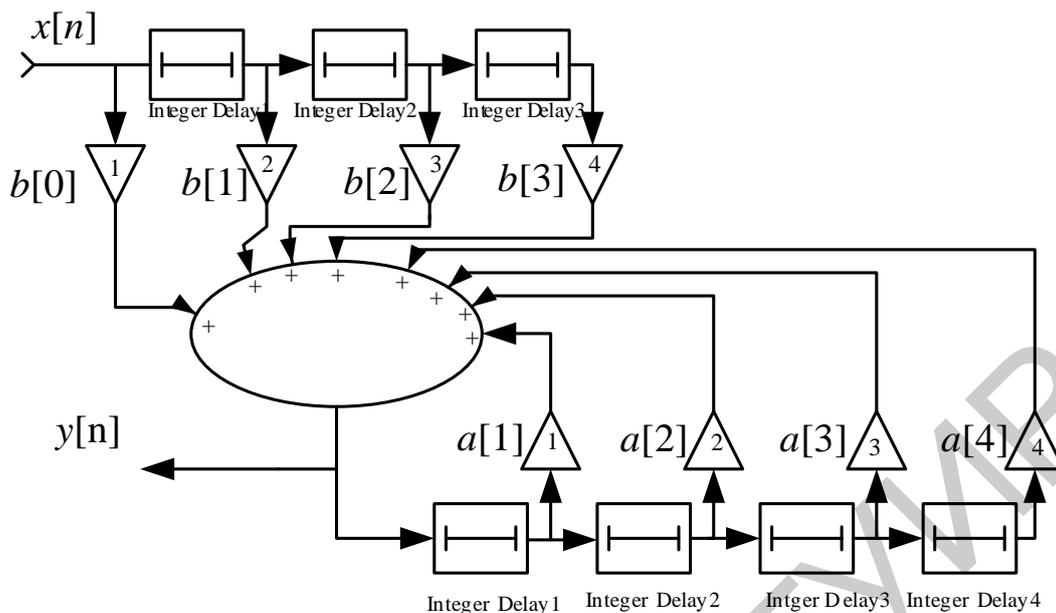


Рис. 1.4. Прямая реализация цифрового рекурсивного фильтра с обратными связями

Пример 1.2. Определим шесть отсчетов импульсной характеристики БИХ-фильтра.

Решение. Подадим на вход последовательность $\vec{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

$$x[0] = 1;$$

$$h[0] = y[0] = x[0] \cdot b[0];$$

$$x[1] = 0;$$

$$h[1] = y[1] = x[1] \cdot b[0] + x[0] \cdot b[1] + y[0] \cdot a[1] = x[0] \cdot b[1] + h[0] \cdot a[1];$$

$$x[2] = 0;$$

$$h[2] = y[2] = x[2] \cdot b[0] + x[1] \cdot b[1] + x[0] \cdot b[2] + y[1] \cdot b[1] + y[0] \cdot a[2] = \\ = x[0] \cdot b[2] + h[1] \cdot a[1] + h[0] \cdot a[2];$$

$$x[3] = 0;$$

$$h[3] = y[3] = x[3] \cdot b[0] + x[2] \cdot b[1] + x[1] \cdot b[2] + x[0] \cdot b[3] + y[2] \cdot a[1] + \\ + y[1] \cdot a[2] + y[0] \cdot a[3] = x[0] \cdot b[3] + h[2] \cdot a[1] + h[1] \cdot a[2] + h[0] \cdot a[3];$$

$$x[4] = 0;$$

$$h[4] = y[4] = h[3] \cdot a[1] + h[2] \cdot a[2] + h[1] \cdot a[3] + h[0] \cdot a[4];$$

$$x[5] = 0;$$

$$h[5] = y[5] = h[4] \cdot a[1] + h[3] \cdot a[2] + h[2] \cdot a[3] + h[1] \cdot a[4].$$

Z-преобразование

Удобным способом анализа дискретных последовательностей и ЛДС является Z-преобразование. Смысл его заключается в том, что последовательности дискретных отчетов сигнала $x[n]$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z , определяемая следующим выражением:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad (1.3)$$

где $z = e^{pT_d z}$ (T_d – интервал дискретизации).

Комплексная функция $X[z]$ определена только для области z , в которой степенной ряд (1.3) сходится. Условие сходимости: $|x[n]| < cr_0^n$ при любых $n > 0$, где $c > 0$ – постоянное действительное число, $r_0 > 0$ – также действительное число, являющиеся радиусом сходимости, зависящим от свойств последовательности данных $x[n]$, $n = 0 \dots < \infty$.

Пример 1.3. Найдем Z-преобразование для четырех отчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра $h = \{h[0] h[1] h[2] h[3]\}$.

Решение. Подставляем h в выражение (1.3):

$$H[z] = \sum_{n=0}^3 h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3}.$$

Из полученного выражения можно сделать вывод: если во временной области дана дискретная последовательность конечной длины равностоящих отчетов импульсной характеристики (сигнала), то Z-преобразование есть результат взвешенного суммирования отчетов импульсной характеристики (сигнала) с Z-коэффициентами. При этом сомножитель Z^{-n} в Z-области есть эквивалент задержки отсчета сигнала на один такт во временной области. Применим Z-преобразование к разностному уравнению (1.1) и запишем передаточную функцию ЛДС:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b[n]z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a[m]z^{-m}}. \quad (1.4)$$

Замечание. Передаточная функция дискретного фильтра есть отношение Z-преобразований выходного сигнала к входному сигналу и является дробно-рациональной. По полученному выражению (1.4) удобно составить структурную схему (см. рис. 1.3, 1.4), определяющую алгоритм преобразования входной дискретной последовательности в выходную.

Для рис. 1.4 передаточная характеристика имеет вид

$$H[z] = \frac{\sum_{n=0}^{4-1} b[n]z^{-n}}{1 - \sum_{m=1}^{5-1} a[m]z^{-m}} = \frac{b[0] + b[1]z^{-1} + b[2]z^{-2} + b[3]z^{-3}}{1 - a[1]z^{-1} - a[2]z^{-2} - a[3]z^{-3} - a[4]z^{-4}}.$$

Пример 1.4. Найдем передаточную характеристику счетчика без сброса, который накапливает поступающие на его вход положительные и отрицательные импульсы.

Решение. Счетчик является цифровым интегратором и описывается разностным уравнением (1), где $b_0 = 1$, $a_1 = 1$:

$$y[n] = x[n] + y[n-1].$$

Применим к разностному уравнению Z-преобразование. В результате получим

$$Y[z] = X[z] + Y[z]z^{-1}.$$

После простого преобразования запишем

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Устойчивость ЛДС

Имеющаяся обратная связь в БИХ-фильтре может быть как положительной, так и отрицательной. На этапе проектирования фильтров нужно выполнить проверку на устойчивость, так как БИХ-фильтр может оказаться неустойчивым. Фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное воздействие $x[n]$ также ограничена, т. е. если $|x[n]| < \infty$ для всех n , то $|y[n]| < \infty$ тоже для всех n . Если $x[n]$ – ограничено, т. е. $|x[n]| \leq \infty A < \infty$ да, где A – константа, то абсолютное значение выходного сигнала отображается следующим неравенством:

$$y[n] \leq \sum_{m=0}^{\infty} |x[n-m]| |h[m]| \leq A \sum_{m=0}^{\infty} |h[m]|.$$

Критерием устойчивости дискретного фильтра является абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики $\sum_{m=0}^{\infty} |h[m]| < \infty$. Данное выражение является не только достаточным, но и необходимым условием устойчивости фильтра. Однако непосредственное использование этого условия проверки устойчивости практически затруднено. Другой критерий устойчивости основан на анализе полюсов передаточной характеристики $H(z)$. В этом случае удобно представить передаточную функцию в виде суммы простых дробей ($N - M$):

$$H(z) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{(1 - \alpha_k z^{-1})},$$

где α_k – полюс; A_k – коэффициент разложения при k -м полюсе.

Последнее представление функции передачи в виде суммы простых дробей позволяет найти импульсную характеристику системы через обратное Z -преобразование, так как каждому слагаемому последнего выражения соответствует обратное преобразование вида $A_k \alpha_k^n$:

$$h(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n.$$

Нетрудно заметить, что ряд будет сходиться и ЛДС будет устойчива, если выполняется условие

$$|\alpha_k| < 1, k = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Таким образом, для того чтобы ЛДС была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все полюса ее передаточной функции распределялись внутри единичного круга комплексной Z -плоскости.

Реализации цифровых фильтров

Прямая форма. Реализуется непосредственно по разностному уравнению или передаточной функции. Схема (пример на рис. 1.4) содержит один сумматор, умножители и $N + M - 2$ элементов задержки.

Прямая каноническая форма. Содержит минимальное число элементов задержки. Она получается, если передаточную функцию рекурсивного фильтра $H(z)$ представить в виде

$$H(z) = H_1(z)H_2(z), \quad H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a[m]z^{-m}}, \quad H_2(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b[n]z^{-n}.$$

В данной структуре используется один набор задержек. Структура фильтра показана на рис. 1.5.

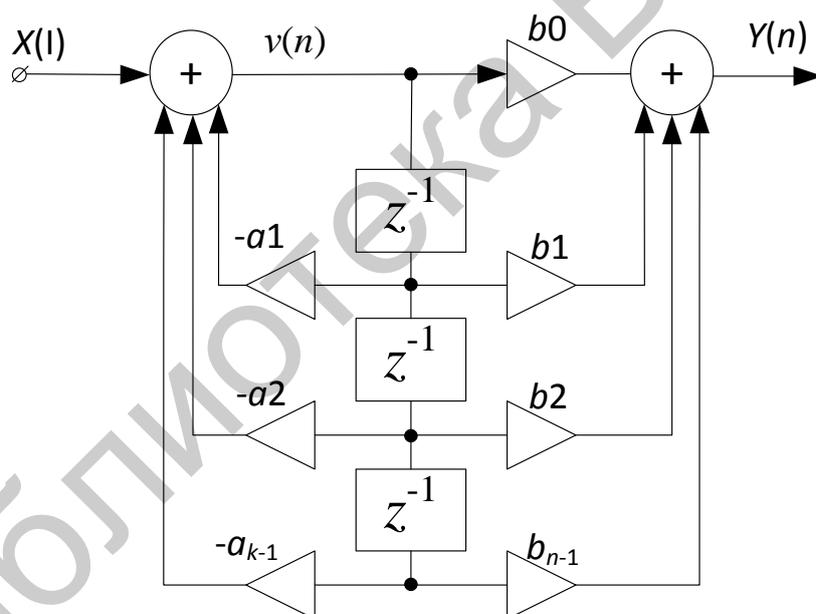


Рис. 1.5. Прямая каноническая форма фильтра

Каскадная (последовательная) форма структурной схемы дискретного фильтра соответствует представлению передаточной функции в виде произведения:

$$H(z) = \prod_{i=0}^M H_i(z).$$

Параллельная форма структурной схемы рекурсивного дискретного фильтра соответствует представлению передаточной функции в виде

$$H(z) = \prod_{i=1}^M H_i(z).$$

Моделирование и анализ временных рядов

Разностные уравнения широко используются для анализа временных рядов и моделирования случайных процессов с заданными спектрально-корреляционными характеристиками. В качестве входного сигнала чаще всего рассматривают модель дискретного белого шума, называемого возбуждающим процессом. Модель выходного процесса, полученная по выражению (1.1), называется авторегрессионной со скользящим средним (АРСС). Если используются только коэффициенты $b[i]$ или $a[i]$, то модели выходного сигнала будут называться скользящее среднее (СС) или авторегрессионная (АР) соответственно. Для примера можно рассмотреть АР-модель, описываемую стохастическим разностным уравнением:

$$y[n] = x[n] - \sum_{m=1}^{M-1} a[m]y[n-m],$$

где $x[n]$ – дискретный белый шум.

1.1.3. Примеры вычисления Z-преобразования и моделирования уравнений в конечных разностях

Примеры вычисления Z-преобразования

Пример 1.5. Найдем Z-преобразование для функции $f[n] = n$.

Решение. Воспользуемся встроенной функцией $ztrans(f)$ и напишем программу:

```
clear all;
syms f n a;
f=n
ztrans(f)
```

Результат: $z/(z-1)^2$.

Пример 1.6. Найдем Z-преобразование для функции $f[n] = e^{an}$.

Решение. Аналогично, как и для примера 1.5:

```
clear all;
syms f n a;
f=exp(a*n)
ztrans(f)
```

Результат: $z/\exp(a)/(z/\exp(a)-1)$.

Расчет импульсной характеристики с помощью разностного уравнения

Для того чтобы вычислить импульсную характеристику БИХ (КИХ)-фильтра по РУ, необходимо в качестве воздействия выбрать единичный цифровой импульс – вектор $[1\ 0\ 0\ 0\ \dots]$, где количество нулей соответствует длине импульсной характеристике (ИХ).

Замечание. Длина импульсной характеристики (ИХ) КИХ-фильтра конечна и равна длине вектора воздействия. Длина импульсной характеристики БИХ-фильтра бесконечна, поэтому будет введено ограничение.

Пример 1.7. Вычислим импульсную характеристику КИХ-фильтра, заданного РУ:

$$y[n] = 0.2x[n] + 0.3x[n-1] + 0.4x[n-2] + 0.9x[n-3] + 0.4x[n-4] + 0.3x[n-5] + 0.4x[n-6].$$

Решение. Введем обозначения: h – импульсная характеристика, $delta$ – единичный цифровой импульс длиной N отсчетов (одна единица и $N-1$ нулей).

Составим программу в М-файле для вычисления ИХ.

```
b=[0.2 0.3 0.4 0.9 0.4 0.3 0.2]; вектор воздействия
a=[1]; вектор реакции
N=length(b); длина импульсной характеристики
delta=[1; zeros(N-1, 1)]; формирует вектор единичного выброса
(модель дельта-функции)
h=filter(b,a,delta); расчет импульсной характеристики
stem(0:N-1,h) построение графика
grid on наложение сетки
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

Пример 1.8. Вычислим импульсную характеристику БИХ-фильтра, заданного РУ:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + 0.7y[n-2] - 0.25y[n-3]. \quad (1.5)$$

Решение. Используем дискретную модель δ -импульса и составим программу:

```
b=[1 1 1];           вектор воздействия
a=[1 0.7 -0.25];     вектор реакции
N= length(a)*10;     ограничение длины импульсной
                    характеристики

delta=[1;zeros(N,1)];
h=filter(b,a,delta);
stem(0:length(delta)-1,h)
grid
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5. Результат решения показан на рис. 1.6.

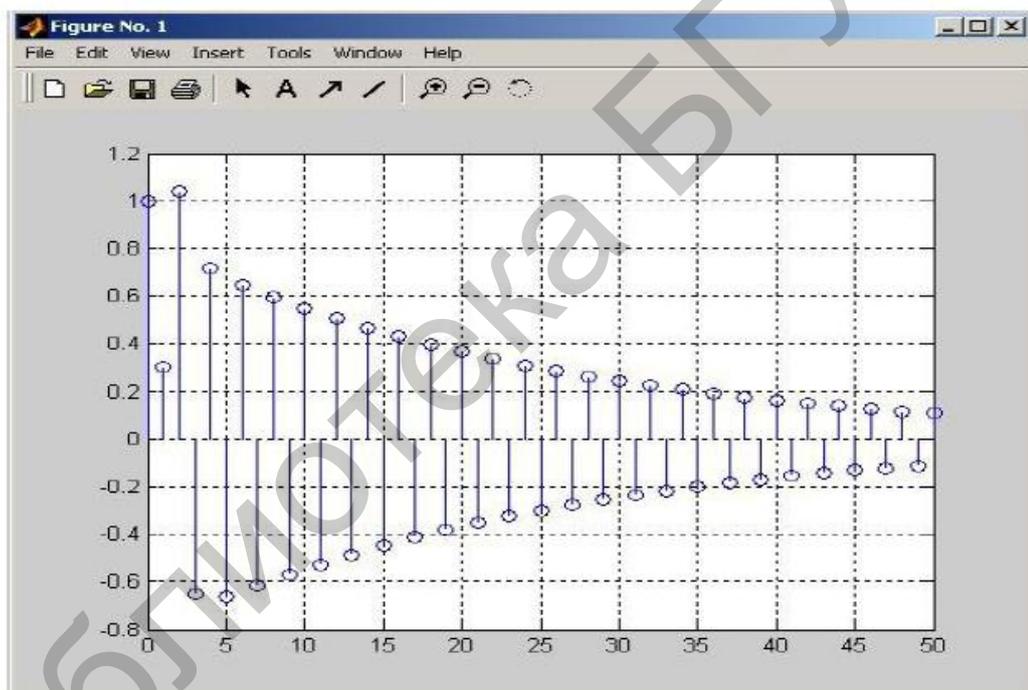


Рис. 1.6. Импульсная характеристика БИХ-фильтра

Расчет импульсной характеристики по коэффициентам разностного уравнения

Импульсная характеристика может быть рассчитана непосредственно по коэффициентам разностного уравнения с помощью функции *impz*, формат которой имеет вид

$$[h, nT] = \text{impz}(b, a, N, Fs),$$

где a , b – векторы коэффициентов в порядке их следования, $a_0 = 1$; N – рассчитываемое количество отсчетов импульсной характеристики; F_s – частота дискретизации сигнала, Гц; h – вектор-столбец импульсной характеристики; T – интервал дискретизации, $1/TS = F1$; nT – вектор-столбец значений дискретного времени.

Пример 1.9. Определим импульсную характеристику БИХ-фильтра по (1.5) при $N = 50$ и $F_s = 2000$ Гц.

Решение.

```
b=[1 1 1];
a=[1 0.7 -0.25];
N=50;
Fs=2000;
[h,nT]=impz(b,a,N,Fs);
stem(nT,h), grid
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

Чтобы получить импульсную характеристику в виде вектора, необходимо записать в строчке $h = \text{impz}(b, a, N)$ вместо $[h, nT] = \text{impz}(b, a, N, Fs)$.

Вычисление реакции ЛДС на входное воздействие на основе разностного уравнения

Моделирование ЛДС на основе РУ – это вычисление реакции на входное воздействие при помощи функции *filter*, формат которой имеет вид

filter(b,a,x).

Пример 1.10. Рассчитаем реакцию КИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ:

$$y[n] = 0.1x[n] + 0.5x[n-1] + 0.7x[n-2],$$

где $n = 0:32$, $2\pi f = \omega T = 0.5$, $x[n] = \sin(\omega T n)$.

Решение

b=[0.1 0.5 0.7];	вектор воздействия
a=[1];	вектор реакции
n=0:32;	дискретные индексы времени

```

x=sin(0.5*n);
y=filter(b,a,x);
plot(n,x,'-or', n,y,'-ob')
grid
hold on
stem(n,x, '-or')
stem(n,y)
gtext('Outputsignal')
gtext('Inputsignal')

```

входное воздействие
вычисление реакции
построение графика воздействия и реакции
сетка
построение двух графиков в одном окне
построение вертикальных линий на графике

метка для выходного сигнала
метка для входного сигнала

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5. Результат решения показан на рис. 1.7.

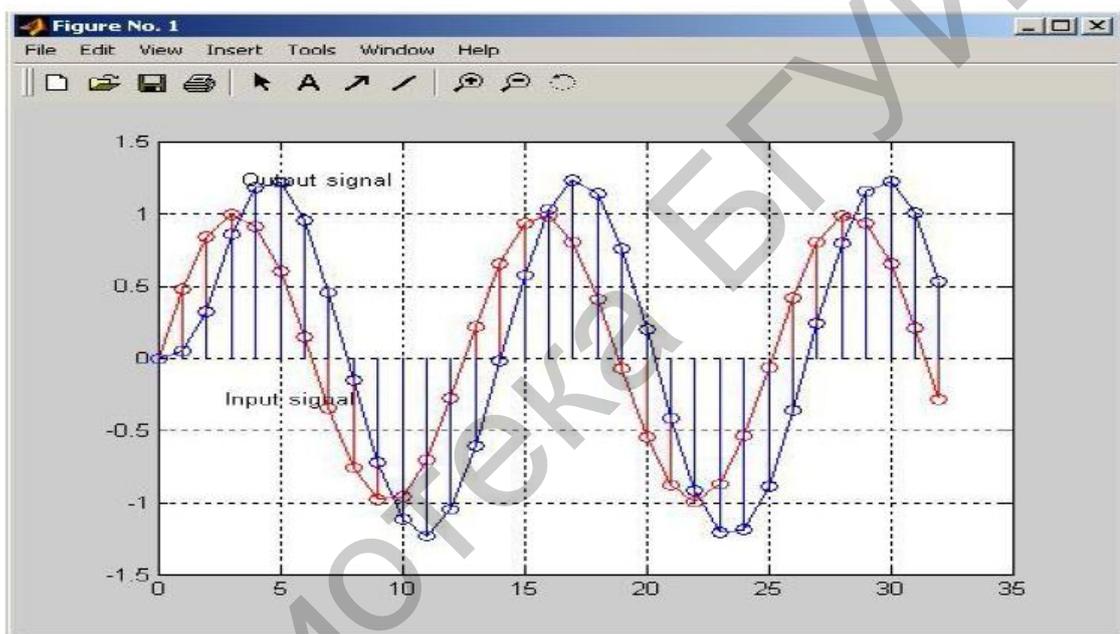


Рис. 1.7. Входной (Input) и выходной (Output) сигналы

Пример 1.11. Рассчитаем реакцию БИХ фильтра 2-го порядка, заданного РУ (1.5) и значениями $n = 0:32$, $2\pi f = \omega T = 0.5$, $x[n] = \sin(\omega T n)$.

Решение

```

b=[1 1 1];
a=[1 0.7 -0.25];
n=0:32;
x=sin(0.5*n);
y=filter(b,a,x);
plot(n,x,'-or',n,y,'-ob')
grid
hold on
stem(n,x,'-or')

```

```
stem(n,y)
gtext('Output signal')
gtext('Inputsignal')
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

Вычисление реакции ЛДС на основе уравнения свертки

Моделирование работы ЛДС на основе уравнения свертки (1.2) выполняется с помощью функции *conv*, формат которой имеет вид *conv(x,h)* или *conv(h,x)*, где *x* – вектор отсчетов воздействия длиной $k = \text{length}(x)$, *h* – вектор отсчетов импульсной характеристики длиной $v = \text{length}(h)$.

В результате вычисления функция *conv* возвращает вектор реакции длиной $k + v - 1$.

Пример 1.12. Вычислим реакцию КИХ-фильтра, заданного РУ

$$y[n] = 0.1x[n] + 0.5x[n - 1] + 0.7x[n - 2]$$

Решение. Примем во внимание, что импульсная характеристика равна вектору коэффициентов РУ, и составим программу вычисления реакции:

```
b=[0.1 0.5 0.7];           импульсная характеристика
h=b;
n=0:32;
x=sin(0.5.*n);           входное воздействие
y=conv(h,x);             вычисление свертки
k=length(y);
hold on
plot(n,x,'-or')
grid                     построение графика входного воздействия
stem(n,x,'-or')
nc=0:(k-1);
plot(nc,y,'-ob')         построение графика реакции
stem(nc,y)
gtext('Outputsignal')
gtext('Input signal')
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

Пример 1.13. Вычислим импульсную характеристику БИХ-фильтра, заданного РУ (1.5).

Решение

```
b=[1 1 1];  
a=[1 0.7 -0.25];  
delta=[1;zeros(50,1)];  
h=filter(b,a,delta);  
n=0:32;  
x=sin(0.5.*n);  
y=conv(x,h);  
k=length(y);  
stem(0:82,y), grid
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

Расчет АЧХ и ФЧХ фильтра

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) $H[k]$ фильтра вычисляется при помощи прямого преобразования Фурье от импульсной характеристики:

$$Ah[k] = \sum_n h[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, n = 0..N-1, k = 0..N-1,$$

$$H[k] = \sqrt{[\operatorname{Re}(Ah[k])]^2 + [\operatorname{Im}(Ah[k])]^2}. \quad (1.6)$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра вычисляется как

$$\varphi[k] = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(Ah[k])}{\operatorname{Re}(Ah[k])} \right). \quad (1.7)$$

Пример 1.14. Вычислим АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра, заданного РУ:

$$y[n] = 0.00634x[n] + 0.0317x[n-1] + 0.07x[n-2] + 0.126[n-3] + \\ + 0.01684[x-4] + 0.18[x-5] + 0.1684[x-6] + 0.126x[n-7] + 0.07x[n-8] + \\ + 0.0317x[n-9] + 0.00634x[n-10].$$

Решение

```
b=[6.34E-3 0.032 0.07 0.126 0.17 0.18 0.17 0.126 0.07 0.032 6.34E-3];  
a=[1];  
N=length(b)*10;            длина импульсной характеристики
```

<code>h=impz(b,a,N);</code>	<i>и преобразования Фурье</i>
<code>Ah=fft(h,N);</code>	<i>вычисление импульсной характеристики по РУ</i>
	<i>преобразования Фурье</i>
	<i>от импульсной характеристики</i>
<code>H=abs(Ah);</code>	<i>вычисление АЧХ</i>
<code>ph=angle(Ah);</code>	<i>вычисление ФЧХ</i>
<code>dl=round(N/2);</code>	<i>ограничение длины преобразования</i>
<code>H=H(1:dl);</code>	<i>ограничение длины АЧХ</i>
<code>ph=ph(1:dl);</code>	<i>ограничение длины ФЧХ</i>
<code>n=0:dl-1;</code>	
<code>plot(n,H,'-or',n,ph,'-ob');</code>	<i>построение графика АЧХ и ФЧХ</i>
<code>grid</code>	<i>сетка на графике</i>

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

Как видно по АЧХ (рис. 1.8), РУ определяет работу фильтра низкой частоты (ФНЧ).

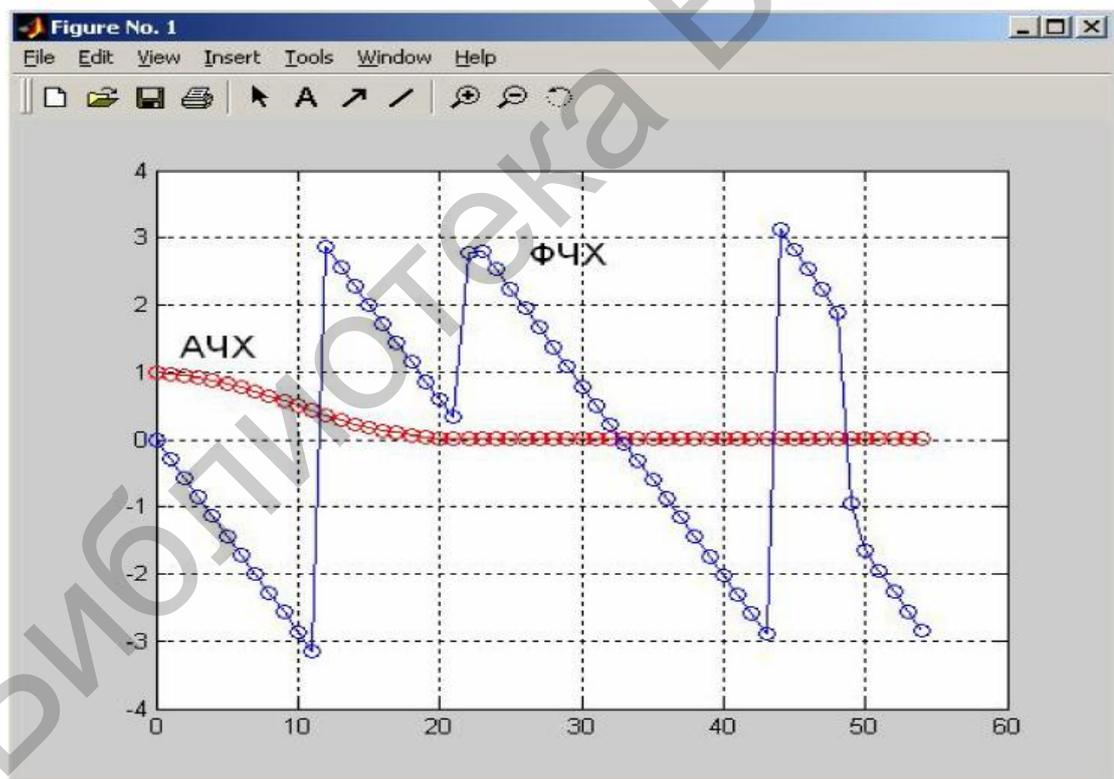


Рис. 1.8. АЧХ и ФЧХ фильтра низкой частоты

Пример 1.15. Вычислим АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра по РУ (1.5).
Решение

```
b=[1 1 1];
a=[1 0.7 -0.25];
```

```

N=length(a)*30;
h=impz(b,a,N);
Ah=fft(h,N);
H=abs(Ah);
ph=angle(Ah);
dl=round(N/2);
H=H(1:dl);
ph=ph(1:dl);
n=0:dl-1;
plot(n,H,'-or',n,ph,'-ob');
grid

```

длина вектора a равна 3,
а длина N преобразования Фурье равна 3·30

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу F5.

1.1.4. Введение в Simulink

Simulink – сопутствующая MATLAB программа. Это интерактивная система, которая работает с линейными, нелинейными, непрерывными, дискретными, многомерными системами. Она представляет собой среду, управляемую мышью, в которой для создания исследуемой системы достаточно перетащить математический блок на рабочее поле.

Blocksets – это дополнения к Simulink, которые обеспечивают библиотеки блоков для специализированных приложений, таких, как коммуникации, обработка сигналов, энергетические системы.

Real-Time Workshop – программа, которая позволяет генерировать C-код из блоков диаграмм и запускать их на выполнение в различных системах реального времени.

Запуск программы осуществляется через MATLAB (см. рис. 1.1). После загрузки Simulink окно имеет вид, показанный на рис. 1.9.

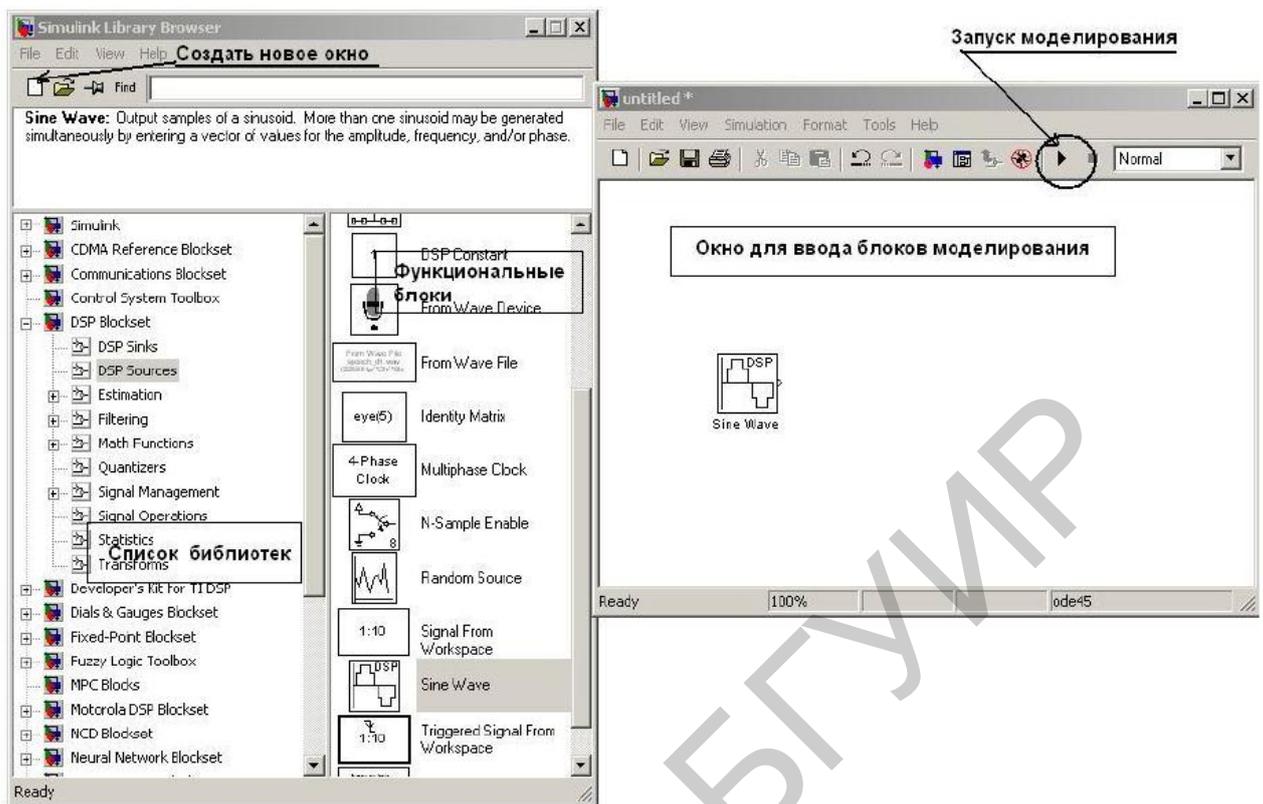


Рис. 1.9. Вид окна библиотек с математическими блоками и окна моделирования Simulink

В левой части располагаются библиотеки для различных инженерных и научных приложений. В правой части отражаются структурные блоки, содержащиеся в библиотеках.

Замечание. На функциональный блок необходимо нажать левой кнопкой мыши и, удерживая, перенести блок на окно моделирования.

Основные библиотеки для моделирования: *Simulink* и *DSP Blockset*.

В библиотеке *Simulink* находятся:

- набор непрерывных моделей сигналов;
- математические операции;
- приборы регистрации (осциллографы);
- модели аналоговых и дискретных фильтров.

В библиотеке *DSP* находятся:

- набор дискретных моделей сигналов;
- математические операции над векторами и матрицами;
- цифровые фильтры;
- блоки вычисления спектров сигналов.

Моделирование ЛДС в Simulink

Пример 1.16. Определим импульсную характеристику КИХ-фильтра с произвольными коэффициентами \mathbf{b} путем динамического моделирования.

Решение. Первоначально построим КИХ-фильтр. Для этого потребуются следующие блоки:

- элемент задержки Integer Delay из DSP Blockset / Signal Operation;
- модель дельта-функции Discrete Impulse из DSP Blockset / DSP Sources;
- усилители Gain из Simulink/Math;
- сумматор Sum из Simulink/Math;
- осциллограф Scope из Simulink/Sinks.

Для настройки блока нужно быстро нажать два раза левой кнопкой мыши, предварительно установив курсор на выбранный блок. В результате откроется окно для настроек.

Собранная модель показана на рис. 1.10.

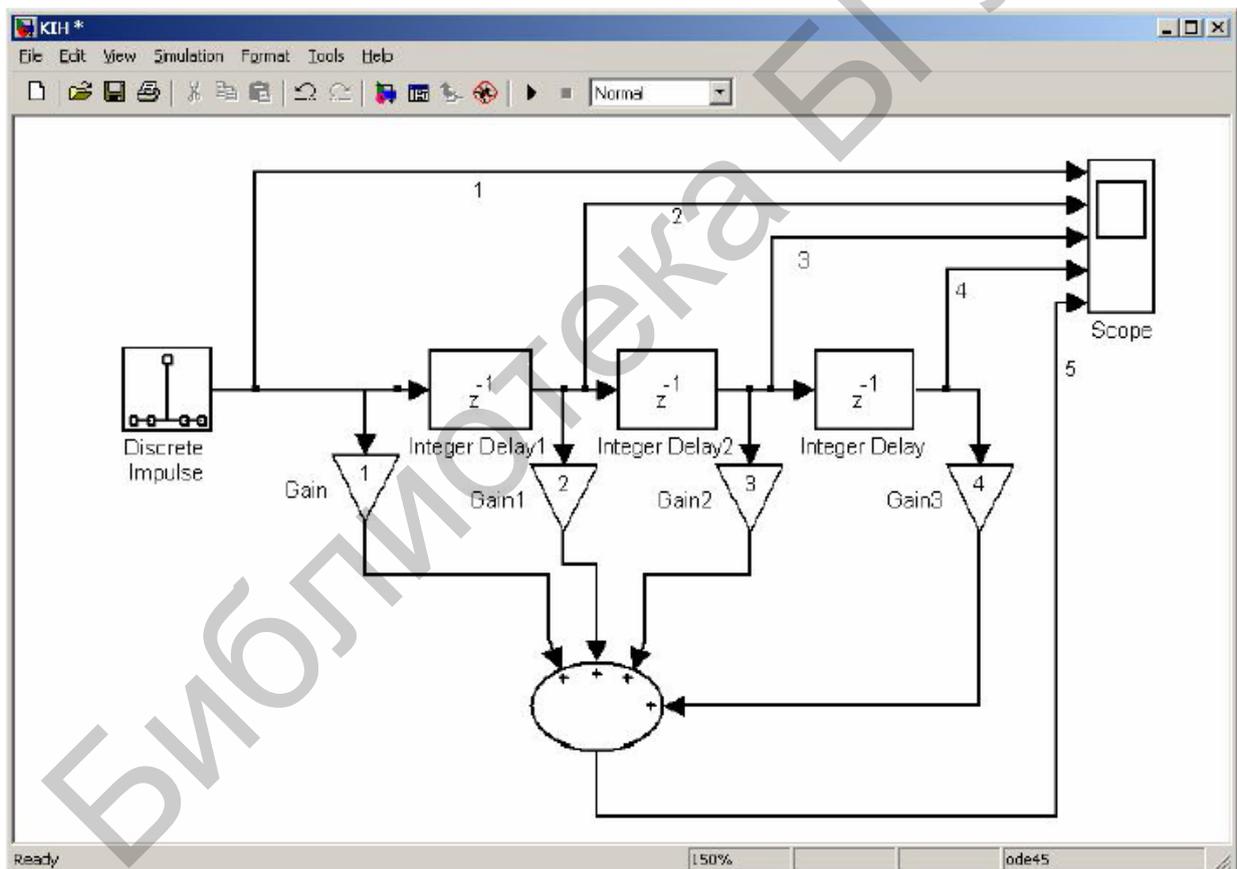


Рис. 1.10. Модель КИХ-фильтра

Временной интервал моделирования задается в окне, которое вызывается по нажатию **Ctrl + E** (рис. 1.11). Значение **Stop time** оставим неизменным.

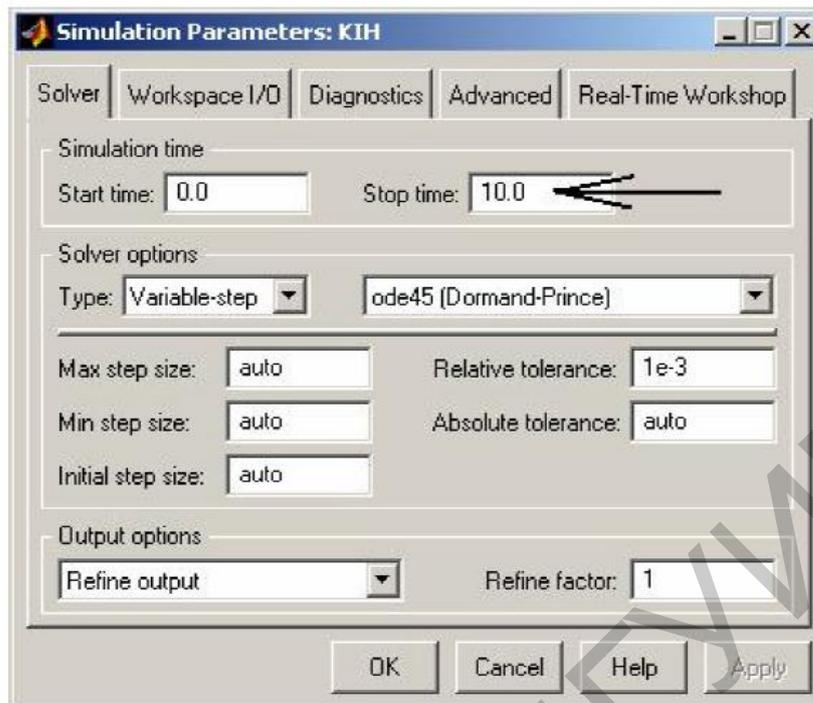


Рис. 1.11. Окно настроек параметров моделирования

После окончания моделирования смотрим результат, дважды нажав левую кнопку мыши по блоку Scope (рис. 1.12).

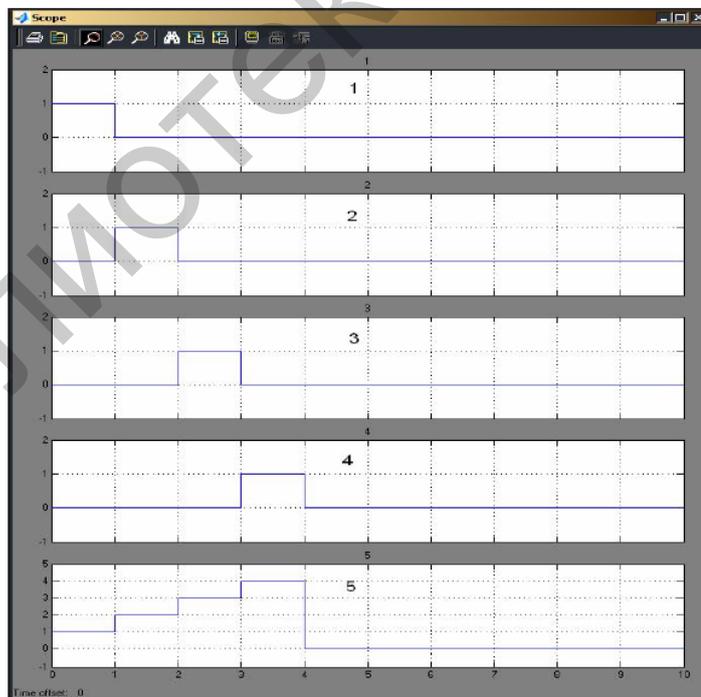


Рис. 1.12. Результат моделирования

Окна 1–4 осциллографа показывают значения сигналов в задержках в дискретные моменты времени, окно 5 – график дискретных отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра.

Пример 1.17. Определим ИХ БИХ-фильтра путем моделирования. Параметры фильтра выберем произвольно.

Решение. По аналогии с КИХ-фильтром создадим модель БИХ-фильтра (рис. 1.13). Параметр Stop Time выберем 50.

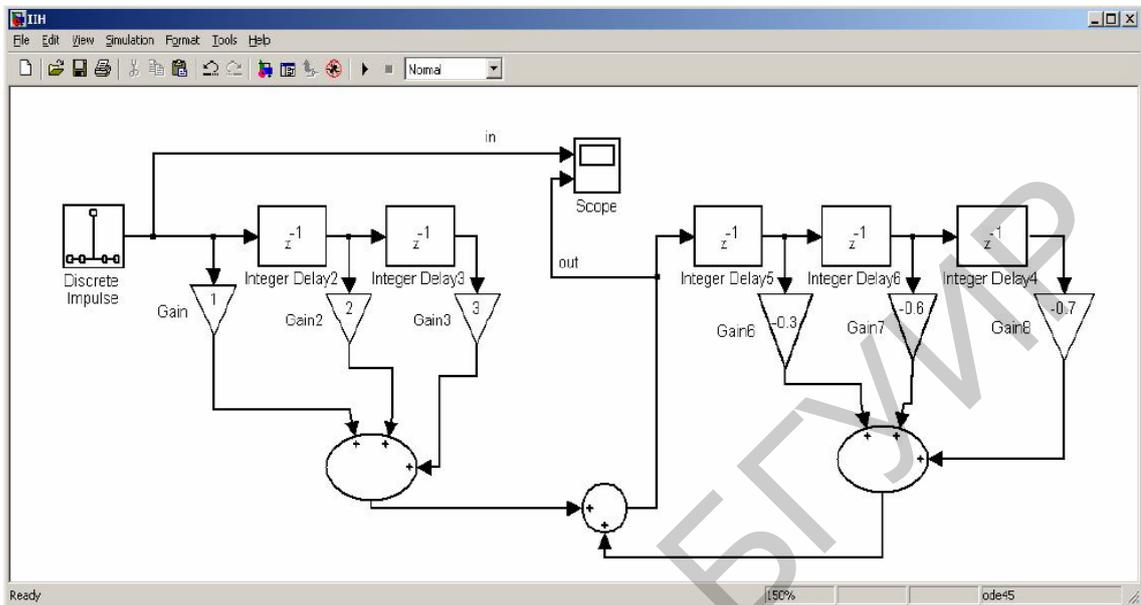


Рис. 1.13. Модель БИХ-фильтра

В Simulink есть возможность использовать модели фильтра (см. рис. 1.10, 1.13) в виде блока Discrete Filter (рис. 1.14). В блок Discrete Filter записываются коэффициенты фильтра в числитель (Numerator) и знаменатель (Denominator).

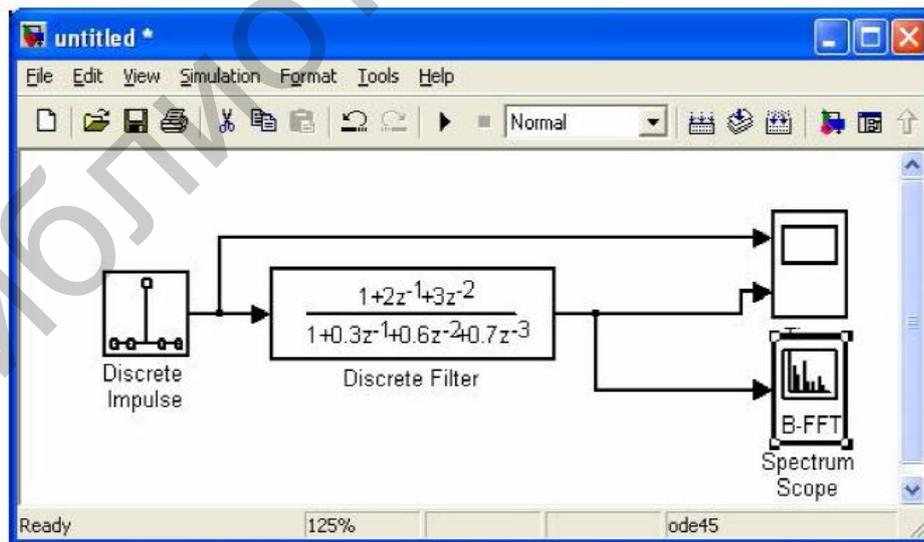


Рис. 1.14. Применение блока дискретного фильтра

Для вычисления преобразования Фурье от импульсной характеристики можно воспользоваться блоком Spectrum Scope из DSP Blockset/DSP Sinks с указанными настройками (рис. 1.15).

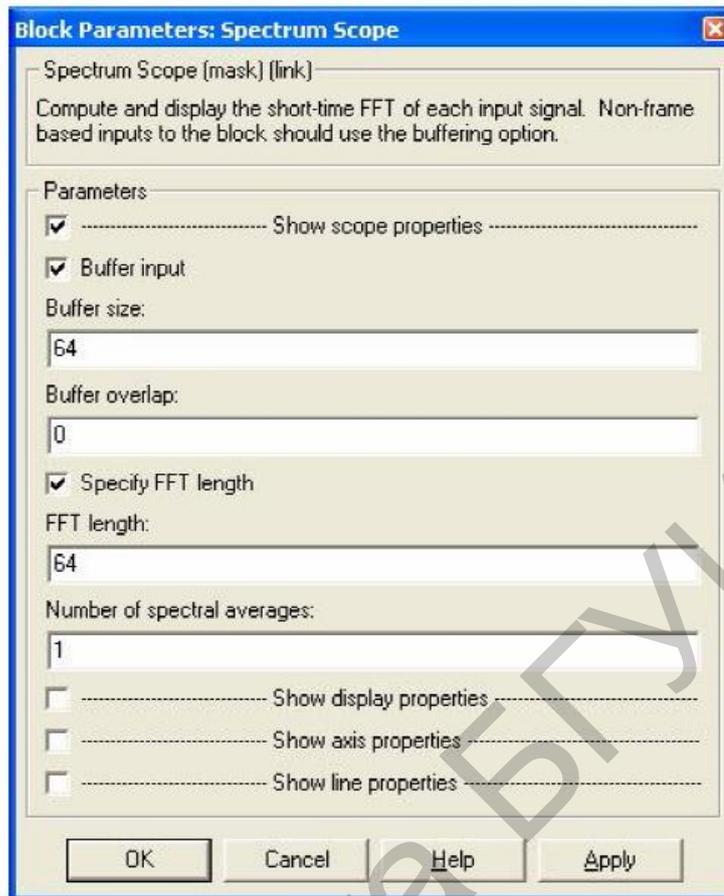


Рис. 1.15. Окно параметров блока Spectrum Scope

Время моделирования (Stop time) должно быть больше 100.

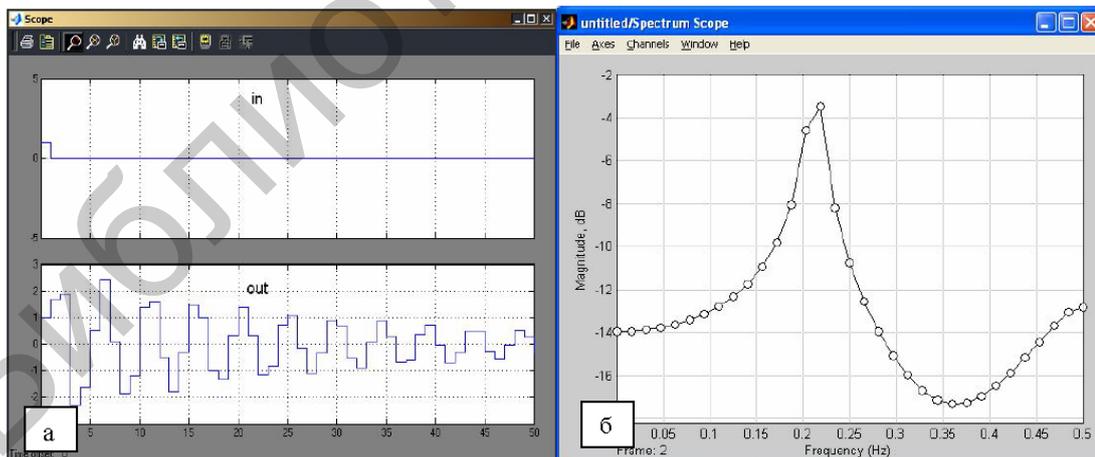


Рис. 1.16. Результат моделирования:

- а – импульсная характеристика;
- б – частотная характеристика БИХ-фильтра

Как видно из двух примеров, пользователь в Simulink с легкостью может создавать любые структуры фильтров, а также измерять значения сигналов в любой точке фильтра.

1.2. Методические рекомендации

1.2.1. Порядок выполнения работы

Для каждого варианта задан тип фильтра (КИХ или БИХ), а также отсчеты векторов воздействия \mathbf{b} и реакции \mathbf{a} . Дополнительно заданы два значения $\omega_i T$, для построения гармонических колебаний.

Необходимо:

- определить импульсную характеристику фильтра, подав на вход дельта-функцию;
- определить импульсную характеристику по отсчетам РУ;
- вычислить реакцию ЛДС на входное воздействие на основе разностного уравнения, в качестве входного воздействия использовать сумму двух гармонических колебаний $\sin(\omega_1 Tn) + \sin(\omega_2 Tn)$, амплитуды двух колебаний принять равными 1 В;
- вычислить реакцию ЛДС на основе уравнения свертки, в качестве входного воздействия использовать сумму двух гармонических колебаний, амплитуды двух колебаний принять равными 1 В;
- рассчитать АЧХ и ФЧХ фильтра и построить графики.

В работе с программой Simulink необходимо:

- собрать КИХ-фильтр 4-го порядка, коэффициенты фильтра выбрать из заданного варианта, определить импульсную и частотную характеристики фильтра;
- собрать БИХ-фильтр по передаточной характеристике (см. п. 2 предварительного задания), определить импульсную и частотную характеристики фильтра.

1.2.2. Предварительное задание

Согласно полученному варианту фильтра произвести следующие расчеты:

- 1) записать РУ для фильтра;
- 2) записать выражение передаточной характеристики фильтра;
- 3) нарисовать структуру фильтра;
- 4) для трех отсчетов фильтра построить ИХ и определить устойчивость фильтра;
- 5) по передаточной характеристике

$$H(z) = \frac{b[0] - b[1]z^{-1} + H_1(z)}{1 - a[1]z^{-1} + a[5]z^{-3}}, \quad H_1(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

записать РУ и нарисовать структуру фильтра.

Замечание. Численные значения $b[i]$ и $a[i]$ выбрать из варианта, заданного преподавателем.

1.2.3. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Расчет предварительного задания.
3. Результаты моделирования (текст программы, схемы фильтров, графики с подписанными осями координат).
4. Выводы.

1.2.4. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение импульсной характеристики фильтра.
2. Какими уравнениями описывается работа ЛДС?
3. Запишите выражение Z-преобразования.
4. Дайте определение передаточной характеристике ЛДС.
5. Как оценивается устойчивость ЛДС?
6. Изобразите структуру БИХ-фильтра.
7. Запишите выражение для передаточной характеристики КИХ-фильтра.
8. Запишите выражение для передаточной характеристики БИХ-фильтра.
9. Какие встроенные функции MATLAB позволяют вычислить ИХ и реакцию на выходе ЛДС?

1.3. Варианты заданий

1. КИХ-фильтр нижних частот (ФНЧ). Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: $-0,044 \ -0,036 \ 0,05 \ 0,03 \ -0,036 \ -0,096 \ 0,053 \ 0,309 \ 0,45 \ 0,3 \ 0,053 \ -0,096 \ -0,036 \ 0,03 \ 0,05 \ -0,036 \ -0,044$. Параметры: $\omega_1 T = 0,039$, $\omega_2 T = 0,131$.

2. КИХ-фильтр верхних частот (ФВЧ). Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: $0,035 \ 0,14 \ -0,044 \ -0,056 \ 0,02 \ 0,1 \ -0,02 \ -0,32 \ 0,52 \ -0,32 \ -0,02 \ 0,1 \ 0,02 \ -0,056 \ -0,044 \ 0,14 \ 0,035$. Параметры: $\omega_1 T = 0,72$, $\omega_2 T = 0,524$.

3. ФВЧ КИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: $0,132 \ 0,0058 \ -0,05 \ -0,039 \ 0,05 \ 0,08 \ -0,06 \ -0,3 \ 0,56 \ -0,32 \ -0,06 \ 0,08 \ 0,05 \ -0,039 \ -0,05 \ 0,0058 \ 0,132$. Параметры: $\omega_1 T = 0,785$, $\omega_2 T = 0,262$.

4. Полосовой КИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: $-0,0008 \ -0,05 \ -0,05 \ 0,147 \ 0,1 \ -0,07 \ -0,16 \ 0,05 \ 0,2 \ 0,05 \ -0,16 \ -0,073 \ 0,1 \ 0,15 \ -0,05 \ -0,05 \ -0,0008$. Параметры $\omega_1 T = 0,72$, $\omega_2 T = 0,524$.

5. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: $5 \ 5,8 \ -2,4 \ 5,1 \ 1,2$. Вектор реакции: $1 \ -0,7 \ -0,3 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,13 \ -0,2$. Параметры: $\omega_1 T = 0,131$, $\omega_2 T = 0,916$.

6. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор

воздействия: 1 3,8 -2,4 2 2 1,14. Вектор реакции: 1 -0,3 0,4 0,3 -0,21 -0,1 -0,25.
Параметры: $\omega_1 T = 0.982$, $\omega_2 T = 0.524$.

7. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: 0,048756 -0,12694 0,080043 0,080043 -0,12694 0,048756. Вектор реакции: 1 -4,3947 7,9712 -7,4263 3,5474 -0,69388. Параметры: $\omega_1 T = 0.982$, $\omega_2 T = 0.524$.

8. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор воздействия: 0,11232 -0,29939 0,19019 0,19019 -0,29939 0,11232. Вектор реакции: 1 -4,353 7,843 -7,2638 3,4477 -0,6677. Параметры: $\omega_1 T = 0.707$, $\omega_2 T = 0.262$.

9. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор реакции: 1 0,0497 0,351 -0,533 0,277 -0,111 0,846 -0,631 -0,09178 -0,66797. Параметры: $\omega_1 T = 0.262$, $\omega_2 T = 0.916$.

10. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор реакции: 1 0,15 0,351 0,55 0,277 -0,154 0,388 -0,314 -0,4178. Параметры: $\omega_1 T = 0.262$, $\omega_2 T = 0.8$.

11. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор реакции: 10,55 0,475 -0,12 0,277 -0,14 0,1232 -0,112 0,554. Параметры: $\omega_1 T = 0.262$, $\omega_2 T = 0.8$.

12. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц. Вектор реакции: 1 0,1179 0,517 -0,266 0,85 -0,855 -0,128 -0,574 0,4822 -0,45272. Параметры: $\omega_1 T = 0.262$, $\omega_2 T = 0.8$.

Лабораторная работа №2

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Цель работы

1. Изучить свойства дискретного преобразования Фурье дискретных последовательностей.
2. Изучить свойства матрицы дискретных экспоненциальных функций.
3. Получить навыки моделирования дискретного преобразования Фурье.

2.1. Краткие теоретические сведения

2.1.1. Модели дискретного и дискретизированного сигналов во временной области

Дискретный сигнал $x(nT)$ представляет собой последовательность отсчетов непрерывного сигнала $x(t)$, взятых с интервалом дискретизации T :

$$x(nT) = x(t = nT). \quad (2.1)$$

Представление (2.1) иногда называют *решетчатой функцией*. Однако таким образом определенный дискретный сигнал неудобен при выполнении классического спектрального анализа, который предполагает использование операции интегрирования над функцией, а не последовательностью чисел.

В этой связи вводят *дискретизированный сигнал* $x_T(t)$ как функцию времени, а процедуру дискретизации представляют в виде произведения исходной функции $x(t)$ и вспомогательной периодической последовательности $y_T(t)$ достаточно коротких тактовых импульсов (рис. 2.1). В качестве таких импульсов рассматривают прямоугольные импульсы амплитудой u_0 и длительностью τ_0 , малой по сравнению с периодом дискретизации T :

$$x_T(t) = x(t) \cdot y_T(t). \quad (2.2)$$

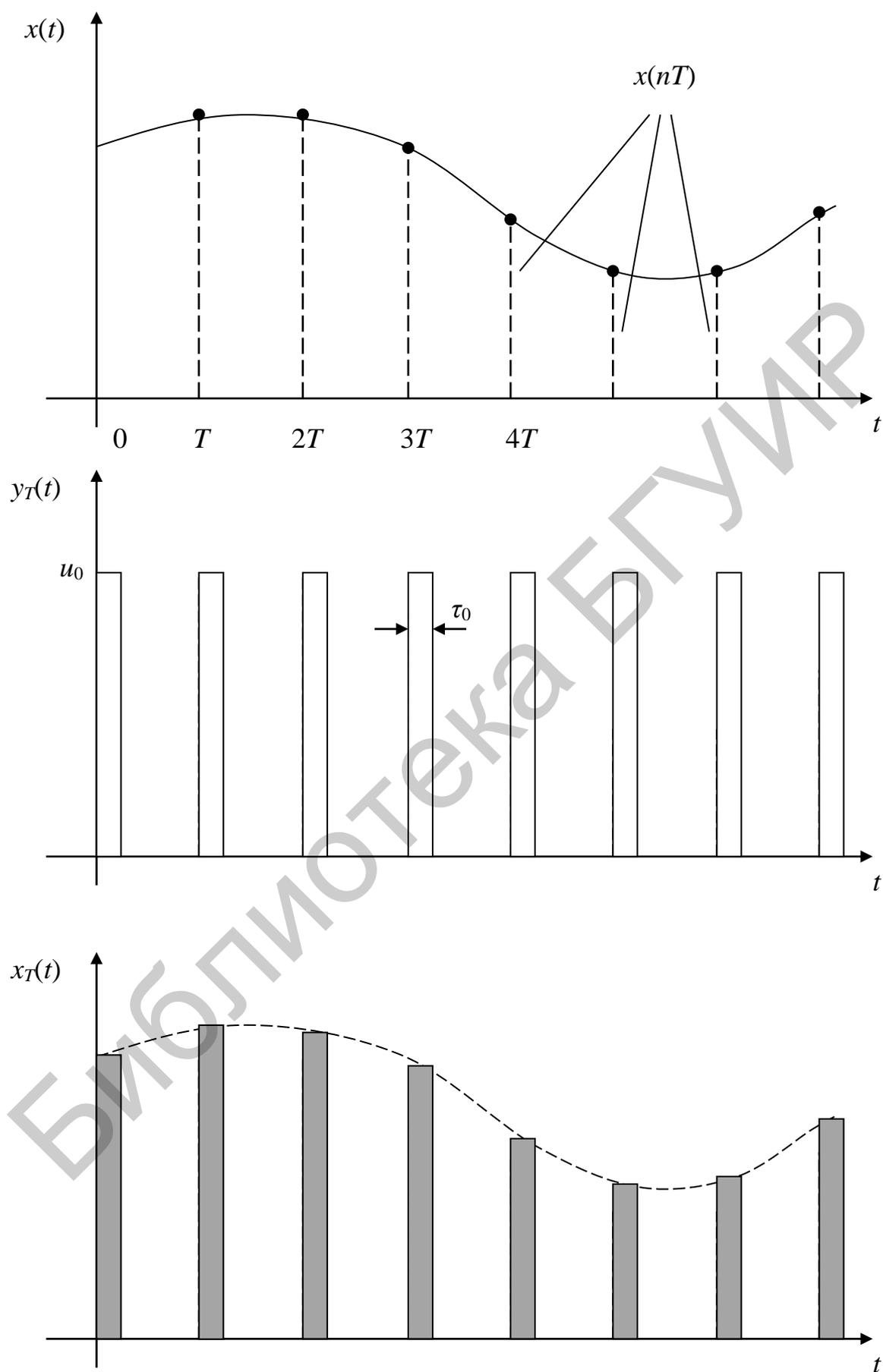


Рис.2.1. Дискретизация сигнала

Если с уменьшением длительности тактовых импульсов τ_0 одновременно увеличивать их амплитуду u_0 , чтобы выполнялось условие $u_0\tau_0 = 1$, то тактовая последовательность примет вид последовательности дельта-функций:

$$y_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (2.3)$$

Тогда выражение (2.2) изменится следующим образом:

$$x_T(t) = x(t) \cdot y_T(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT). \quad (2.4)$$

Таким образом, последовательность временных отсчетов приобретает вид последовательности дельта-функций с весовыми коэффициентами, равными значениям сигнала $x(t)$ в моменты времени kT .

Спектр таким образом определенного сигнала $x_T(t)$ будем обозначать как $X_T(\omega)$ в отличие от обычно используемого классического спектра $X(\omega)$ для исходного непрерывного сигнала $x(t)$.

2.1.2. Преобразование Фурье дискретизированного сигнала

Представим дискретизированный сигнал в виде набора дельта-функций:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Преобразование Фурье такого сигнала запишется в виде

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись фильтрующим свойством дельта-функции, получим

$$X_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T}. \quad (2.5)$$

Таким образом, введя в рассмотрение дискретизированный сигнал $x_T(t)$, удалось получить выражение для его спектра через дискретные значения сигнала $x(nT)$. Спектр дискретизированного сигнала $X_T(\omega)$ представляет собой непрерывную периодическую функцию частоты.

Соотношение (2.5) является одновременно:

- прямым преобразованием Фурье дискретизированного сигнала $x_T(t)$;

- рядом Фурье непрерывной функции $X_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T}$.

Поэтому коэффициенты $x(n)$ ряда Фурье $X_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T}$ могут быть вычислены по известной формуле для коэффициентов ряда Фурье:

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_T(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot T} d\omega. \quad (2.6)$$

2.1.3. Связь спектра дискретизированного сигнала со спектром исходного сигнала. Теорема Котельникова

Связь спектра дискретизированного сигнала со спектром исходного сигнала

Найдем связь между спектром дискретизированного сигнала $X_T(\omega)$ и спектром исходного сигнала $x(t)$ до его дискретизации $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$.

Для этого учтем выражение для обратного преобразования Фурье $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} dt$. Для дискретных значений сигнала можно записать следующую связь со спектром исходного непрерывного сигнала $X(\omega)$:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot nT} d\omega.$$

Подставим это соотношение в выражение для спектра дискретизированного сигнала:

$$\begin{aligned}
 X_T(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega_1) \cdot e^{j\omega_1 nT} d\omega_1 \cdot e^{-j\omega nT} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega_1) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 - \omega)nT} d\omega_1.
 \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 - \omega)nT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_1 - \omega + \frac{2\pi}{T}k\right).$$

Воспользуемся фильтрующим свойством дельта-функции, в соответствии с которым

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega_1) \cdot \delta\left(\omega_1 - \omega + \frac{2\pi}{T}k\right) d\omega_1 = X\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right).$$

Таким образом, можно записать следующее выражение, которое характеризует связь спектра дискретизированного сигнала со спектром исходного непрерывного сигнала, который подвергается дискретизации:

$$X_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi}{T} \cdot k\right). \quad (2.7)$$

Таким образом, спектр дискретизированного сигнала представляет собой периодическую последовательность на оси частот с периодом $\frac{2\pi}{T}$ спектров исходного недискретизированного сигнала.

Восстановление исходного непрерывного сигнала. Теорема Котельникова

Если исходный недискретизированный сигнал $x(t)$ ограничен верхней граничной частотой $\omega_g \leq \frac{\pi}{T}$, то отдельные копии спектра $X(\omega)$ не накладываются друг на друга (рис. 2.2).

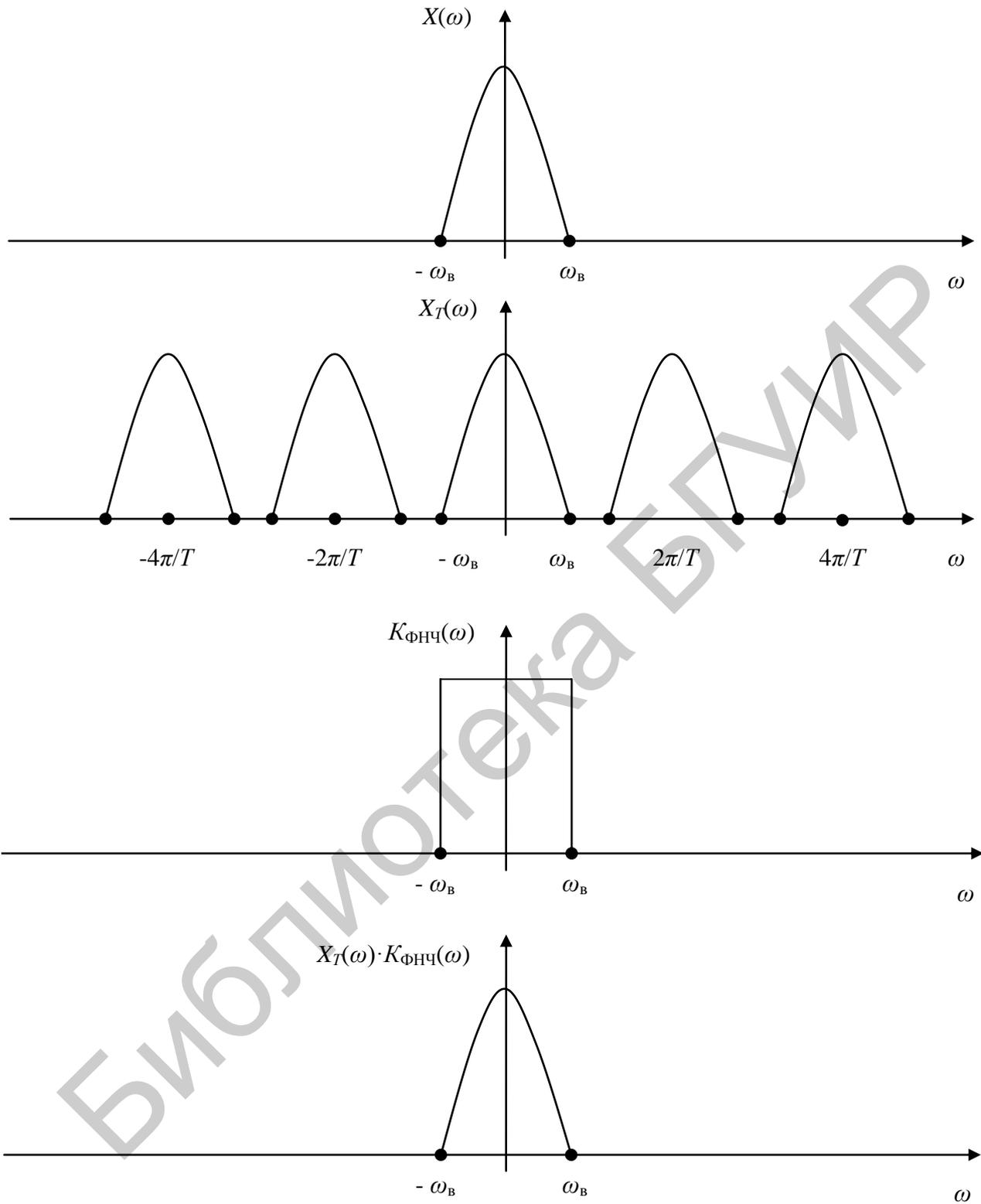


Рис. 2.2. Восстановление исходного непрерывного сигнала

В этом случае аналоговый сигнал $x(t)$, подвергшийся дискретизации, в соответствии с теоремой Котельникова может быть полностью восстановлен с помощью идеального ФНЧ, имеющего прямоугольную АЧХ, на вход которого подан дискретизированный сигнал $x_T(t)$:

$$K(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & |\omega| > \omega_g. \end{cases}$$

Импульсная характеристика такого фильтра является обратным преобразованием Фурье от частотной характеристики:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin \omega_g t}{\omega_g t}.$$

В этом случае, используя интеграл Дюамеля, можно получить выражение, в соответствии с которым можно восстановить исходный, ограниченный по спектру сигнал в базисе Котельникова, если есть его дискретные значения:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \cdot h(t - \tau) d\tau = \frac{\omega_g}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT) \cdot \frac{\sin \omega_g t}{\omega_g t} d\tau = \\ &= \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin \omega_g (t - kT)}{\omega_g (t - kT)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Точная формулировка теоремы Котельникова имеет следующий вид: произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше ω_g , может быть полностью восстановлен, если известны дискретные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $\frac{\pi}{\omega_g}$.

2.1.4. Дискретное преобразование Фурье

Спектральная плотность дискретизированного сигнала $X_T(\omega)$ является непрерывной периодической функцией частоты с периодом $\frac{2\pi}{T}$.

Однако для цифровой обработки требуется дискретизация сигнала не только во временной области, но и в частотной (рис. 2.3).

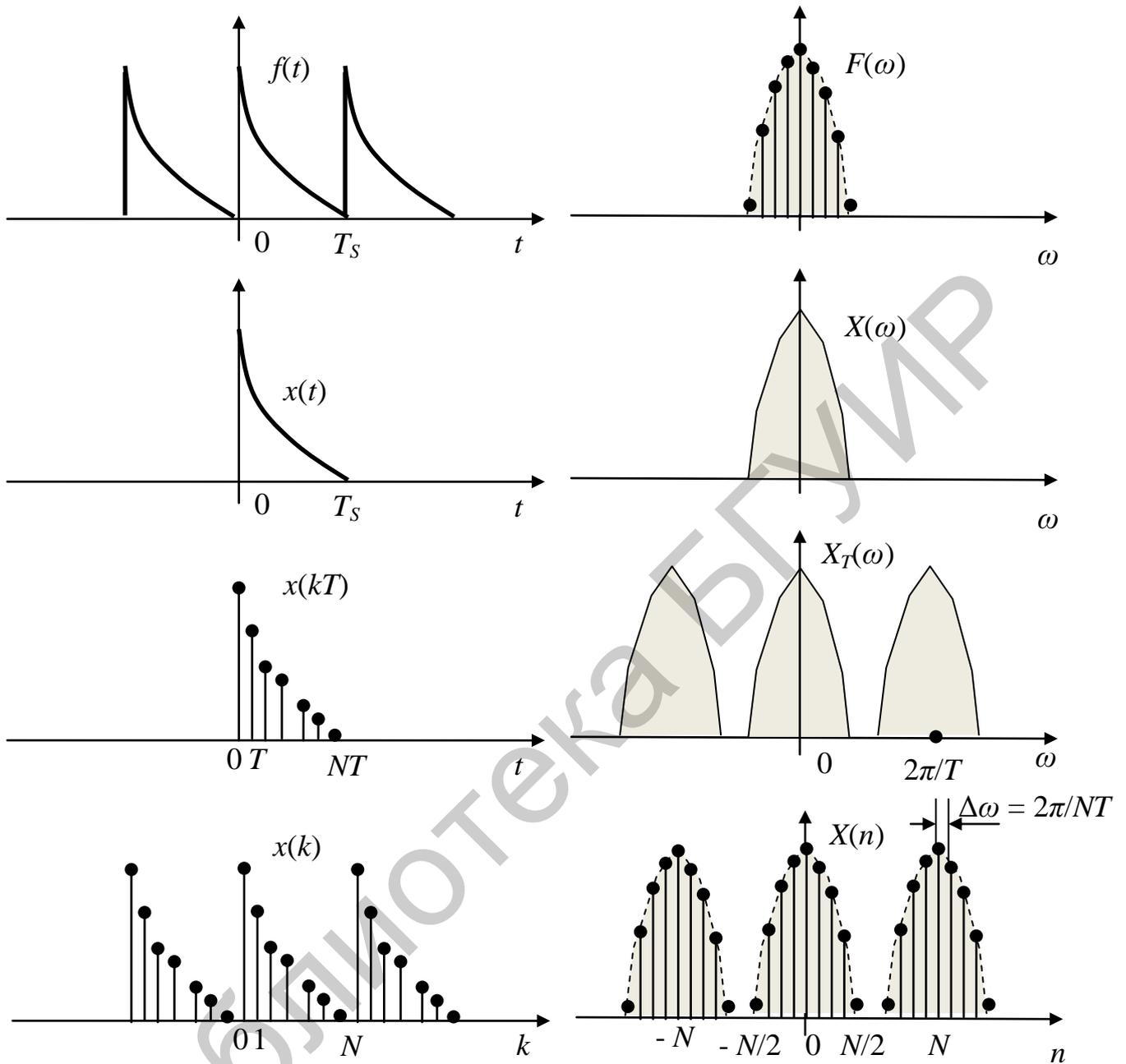


Рис. 2.3. Дискретизация сигнала по времени и спектру

Для этого сплошной спектр $X_T(\omega)$ должен быть представлен совокупностью своих дискретных значений $X_T(k \cdot \Delta\omega)$. Такой спектр может быть получен в результате периодического повторения последовательности $x(nT)$ с периодом $T_s = NT$. В этом случае интервал между соседними спектральными составляющими равен

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{NT}.$$

После подстановки $\omega = k \cdot \Delta\omega$ получаем следующее выражение для спектральной плотности (с учетом перехода от бесконечной последовательности к конечной длительностью NT):

$$X_T(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-j \cdot k\Delta\omega \cdot nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} k \cdot n}, \quad (2.9)$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2 \text{ (для четного } N\text{)}.$$

Выражение (2.9) называют дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), которое обычно записывается через аргументы k и n :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} k \cdot n}, \quad (2.10)$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2.$$

С учетом периодичности ДПФ его можно записывать следующим образом:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} k \cdot n}, \quad (2.11)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Можно показать, что обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) записывается в виде

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} k \cdot n}, \quad (2.12)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Таким образом, дискретизированному сигналу $x(nT)$ соответствует сплошной спектр $X_T(\omega)$ с периодической структурой. Дискретизированному спектру $X(k)$ соответствует периодическая последовательность сигналов $x(nT)$, повторяемых с периодом N .

ДПФ является линейным преобразованием, трансформирующим вектор временных отсчетов в вектор такой же длины, содержащей спектральные

отсчеты. Такое преобразование может быть представлено как результат умножения некоторой квадратной матрицы на входной вектор-столбец:

$$\vec{X} = \mathbf{A}_{\text{ДПФ}} \cdot \vec{x}, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{A}_{\text{ДПФ}}$ – матрица преобразования.

Общая формула для элемента матрицы, расположенного в n -м столбце m -й строки, имеет вид

$$A_{\text{ДПФ}}(m, n) = \exp\left(-j2\pi \frac{(m-1)(n-1)}{N}\right), \quad 1 \leq m \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (2.14)$$

Например, при $N = 4$ матрица преобразования ДПФ запишется следующим образом:

$$\mathbf{A}_{\text{ДПФ}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\pi} & e^{-j\frac{3\pi}{2}} \\ 1 & e^{-j\pi} & e^{-j2\pi} & e^{-j3\pi} \\ 1 & e^{-j\frac{3\pi}{2}} & e^{-j3\pi} & e^{-j\frac{9\pi}{2}} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

2.1.5. Свойства дискретного преобразования Фурье

1. *Линейность ДПФ.* ДПФ суммы дискретных последовательностей длительности N равна сумме ДПФ слагаемых суммы и имеет длину N :

$$x(n) = \sum_l a_l x_l(n);$$

$$X(k) = \sum_l a_l X_l(k).$$

2. *ДПФ сумм последовательностей разной длины.* Если в исходной сумме последовательностей $x(n) = \sum_l a_l x_l(n)$ разные длины: N_1, N_2, N_3, \dots , то

перед вычислением ДПФ всей последовательности необходимо привести последовательности к одинаковой длине N , равной максимальной длине исходных последовательностей, за счет дополнения нулями.

3. *Сдвиг ДПФ.* Сдвиг ДПФ по оси k вправо на величину k_0 соответствует умножению исходной последовательности на комплексную экспоненту $e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}$:

$$X(k - k_0) \rightarrow x(n) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}.$$

4. *Сдвиг исходной последовательности.* Сдвиг последовательности вправо на m отсчетов (задержка последовательности) соответствует умножению

ДПФ на комплексную экспоненту $e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$:

$$x(n - m) \rightarrow X(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}.$$

5. *Теорема Парсеваля* для периодических и конечных последовательностей:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Теорема Парсеваля утверждает, что энергию сигнала можно вычислить как по переменной n во временной области, так и по переменной k в частотной области.

6. *Свойство симметрии.* Свойство симметрии вещественной последовательности:

$$X(k) = X^*(N - k),$$

$$|X(k)| = |X(N - k)|,$$

$$\arg(X(k)) = -\arg(X(N - k)).$$

Ось симметрии проходит через точку $k = \frac{N-1}{2}$.

Для четного N :

$$X\left(\frac{N}{2} + l\right) = X^*\left(\frac{N}{2} - l\right), k = 0, 1, \dots, N/2. \quad (2.16)$$

Из равенства (2.16) следует, что $X(N/2)$ и $X(0)$ всегда действительные числа.

7. ДПФ вещественной последовательности. ДПФ вещественной последовательности полностью определено на интервале $\left[0; \frac{N-1}{2}\right]$, который соответствует основному спектру сигнала.

2.1.6. Программное обеспечение

Лабораторная работа выполняется в среде компьютерной математики MATLAB.

1. Построим матрицу прямого преобразования Фурье:

```
N=4;
n=0:N-1;
k=0:N-1;
W=exp(-j*2*pi*n'*k/N)
```

1	1	1	1
1	$0 - 1i$	$-1 - 0$	$0 + 1i$
1	$-1 - 0$	$1 + 0$	$-1 - 0$
1	$-0 + 1i$	$-1 - 0$	$0 - 1i$

2. Построим матрицу обратного преобразования Фурье:

```
N=4;
n=0:N-1;
k=0:N-1;
Wo=exp(j*2*pi*n'*k/N)
```

1	1	1	1
1	$0 + 1i$	$-1 + 0$	$0 - 1i$
1	$-1 - 0$	$1 - 0$	$-1 + 0$
1	$-0 - 1i$	$-1 + 0$	$0 + 1i$

3. Имея матрицу преобразования Фурье, удобно проверить ортогональность матричных преобразований:

```
W*conj(W)
```

$$\begin{matrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

4. Полученная диагональная матрица означает, что никакая дискретная экспоненциальная функция (ДЭФ) не может быть выражена через остальные ДЭФ.

5. Выполним ДПФ случайной последовательности s :

```
s=floor(rand(N,1)*10)
S=W*s
```

```
s=8
7
4
0
```

```
S=
19.0000
4.0000-7.0000i
5.0000+0.0000i
4.0000+7.0000i
```

6. Вычислим амплитудный и фазовый спектры:

```
S_a=abs(S)
S_ph=angle(S)
```

7. Вычислим обратное ДПФ через матрицу обратного преобразования Фурье:

```
s1=Wo*S/4
```

и через матрицу перестановок:

```
s1_1=W*(Q*S/4)
```

Матрица Q имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

2.2. Методические рекомендации

2.2.1. Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями о дискретном преобразовании Фурье и изучить его свойства.
2. Изучить принципы и правила использования программного пакета MATLAB.
3. Построить матрицу прямого и обратного ДПФ размерностью $N \times N$, $N=8$.
4. Выполнить ДПФ случайного действительного сигнала, заданного дискретными отсчетами. Отсчеты сигнала задаются случайным образом. Определить вычислительную сложность. Сделать выводы.
5. Определить амплитудный и фазовый спектры. Сделать выводы.
6. Вычислить обратное ДПФ для полученного спектра с помощью обратной матрицы и матрицы перестановок. Сделать выводы.
7. Исследовать свойства линейности ДПФ для двух случайных действительных сигналов длиной $N=8$. Сделать выводы.
8. Исследовать особенности спектра следующих сигналов, сделать выводы:
 - сигнала как четной функции $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_3, s_2, s_1\}$, где s_n – действительные отсчеты сигнала;
 - сигнала как нечетной функции $\{0, s_1, s_2, s_3, -s_3, -s_2, -s_1\}$, где s_n – действительные отсчеты сигнала;
 - сигнала с мнимыми отсчетами $\{js_0, js_1, js_2, js_3, js_4, js_5, js_6, js_7\}$.
9. Исследовать особенности амплитудного и фазового спектров сигнала s , сдвинутого циклически на 4 и 6 отсчетов. Сделать выводы.

2.2.2. Предварительное задание

1. Получить у преподавателя параметры матрицы преобразования Фурье (табл. 2.1).
2. Построить матрицу преобразования Фурье.
3. Провести необходимые матричные преобразования и убедиться в справедливости свойств дискретных экспоненциальных функций.

2.2.3. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Результаты моделирования свойств ДПФ.
3. Результаты расчетов предварительного задания.
4. Выводы и замечания по работе.

2.2.4. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите преобразование Фурье.
2. Для чего при спектральном анализе вводят дискретизированный сигнал и что он из себя представляет?
3. Запишите выражение для спектра дискретизированного сигнала и сформулируйте его основные свойства.
4. Как связаны между собой спектр дискретизированного сигнала и ДПФ?
5. Запишите матрицу дискретного преобразования Фурье.
6. Поясните свойство ДПФ относительно сдвига по времени и частоте.
7. Какие особенности имеет спектр ДПФ вещественной последовательности?

2.3. Варианты индивидуальных заданий

Таблица 2.1

Параметры матрицы преобразования Фурье

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
Исходный сигнал	<i>random</i>							
Размерность матрицы преобразования Фурье	4	8	16	4	8	16	4	8

Лабораторная работа №3

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СВЕРТОК СИГНАЛОВ

Цель работы

1. Изучение алгоритмов вычисления свертки сигналов.
2. Изучение алгоритмов вычисления длинных непрерывных свертки сигналов.
3. Получение навыков моделирования алгоритмов цифровой обработки сигналов.

3.1. Краткие теоретические сведения

3.1.1. Линейная и циклическая свертки сигналов

Операция **линейной свертки** двух последовательностей $\{x[k]; k = 0, 1, \dots, M - 1\}$ и $\{h[k]; k = 0, 1, \dots, L - 1\}$ определяется соотношением

$$y[m] = \sum_{i=0}^{L+M-2} x[i]h[m-i], m = 0, 1, \dots, L + M - 2. \quad (3.1)$$

В матричном виде линейная свертка записывается следующим образом (для $L=M=N$):

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ \dots \\ y[N-1] \\ y[N] \\ \dots \\ y[2N-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & \dots & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \dots & h[0] \\ 0 & h[N-1] & h[N-2] & \dots & h[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & h[N-1] & h[N-2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h[N-1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ \dots \\ x[4] \\ \dots \\ x[N-3] \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{bmatrix}.$$

Например, пусть $N=4$, тогда

$$\vec{x} = [x[0], x[1], x[2], x[3]]^T, \vec{h} = [h[0], h[1], h[2], h[3]]^T;$$

$$\vec{x} \cdot \vec{h} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \\ 0 & h[3] & h[2] & h[1] \\ 0 & 0 & h[3] & h[2] \\ 0 & 0 & 0 & h[3] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0]x[0] \\ h[1]x[0] + h[0]x[1] \\ h[2]x[0] + h[1]x[1] + h[0]x[3] \\ h[3]x[0] + h[2]x[1] + h[1]x[2] + h[0]x[3] \\ h[3]x[1] + h[2]x[3] \\ h[2]x[3] \end{bmatrix}.$$

Физической моделью линейной свертки является цифровой фильтр с конечной импульсной характеристикой.

Соотношение (3.1) имеет большое значение, поскольку позволяет осуществлять фильтрацию, линейную обработку сигналов и моделировать линейные системы. Применительно к этим задачам $x[k]$ и $y[m]$ рассматриваются как входной и выходной сигналы системы (апериодические последовательности), а $h[k]$ – как ее импульсная характеристика. Пример такой свертки дает нерекурсивный или трансверсальный фильтр.

Циклическая свертка периодических последовательностей длиной N определяется выражением

$$y[m] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]h[m-i]_{\text{mod } N}, m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

При этом справедливы следующие соотношения: $x[-n] = x[N - n]$ и $h[-n] = h[N - n]$.

В матричном виде циклическая свертка записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \dots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \dots & h[N-1] \\ h[1] & h[2] & \dots & h[0] \\ h[2] & h[3] & \dots & h[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h[N-1] & h[0] & \dots & h[N-2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[N-1] \\ x[N-2] \\ \dots \\ x[1] \end{bmatrix}.$$

Например, для $\vec{x} = [x[0], x[1], x[2], x[3]]^T$, $\vec{h} = [h[0], h[2], h[3]]^T$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \\ h[1] & h[2] & h[3] & h[0] \\ h[2] & h[3] & h[0] & h[1] \\ h[3] & h[4] & h[1] & h[2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[3] \\ x[2] \\ x[1] \end{bmatrix}.$$

Вычисление линейной свертки через циклическую. Для вычисления линейной свертки двух последовательностей длиной N_1 и N_2 можно воспользоваться алгоритмом вычисления циклической свертки, но при этом исходные последовательности следует дополнить нулевыми отсчетами так, чтобы их длина стала равной $(N_1 + N_2 - 1)$, и рассматривать их как периодические. Например, пусть сворачиваемые последовательности имеют вид

$$\vec{x} = [x[0], x[1], x[2], x[3]]^T \text{ и } \vec{h} = [h[0], h[1], h[2], h[3]]^T, \quad L = M = N = 4,$$

дополним их нулями до длины $L + M - 1 = 7$ и вычислим циклическую свертку:

$$\begin{bmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[2] & h[3] & 0 & 0 & 0 & h[0] \\ h[2] & h[3] & 0 & 0 & 0 & h[0] & h[1] \\ h[3] & 0 & 0 & 0 & h[0] & h[1] & h[2] \\ 0 & 0 & 0 & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \\ 0 & 0 & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & 0 \\ 0 & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x[3] \\ x[2] \\ x[1] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} h[0]x[0] \\ h[1]x[0] + h[0]x[1] \\ h[2]x[0] + h[1]x[1] + h[0]x[2] \\ h[3]x[0] + h[1]x[1] + h[1]x[2] + h[0]x[3] \\ h[3]x[1] + h[2]x[2] + h[1]x[3] \\ h[3]x[2] + h[2]x[3] \\ h[3]x[3] \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме о свертке, циклическая свертка может быть вычислена с помощью дискретные преобразования Фурье:

$$y[m] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [X(i)H(i)]W^{-im}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

где $W = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$, $X(i)$, $H(i)$ – Фурье-образы последовательностей $x[k]$ и $h[k]$ соответственно.

На рис. 3.1 показан пример выполнения циклической свертки с явлением затягивания двух периодически повторяющихся последовательностей. На рис. 3.2 показана аperiodическая свертка двух прямоугольных импульсов.

Различие линейной и циклической свертки состоит в следующем. **Затягивание**, характерное для процесса линейной свертки, приводит к **перекрытию** в случае периодической свертки. Поэтому, когда требуется вычислить свертку аperiodических функций, необходимо принять меры к тому, чтобы избежать перекрытия. В рассмотренном примере этого можно достигнуть, увеличивая период функций (рис. 3.3) и используя дискретное преобразование Фурье с большим N .

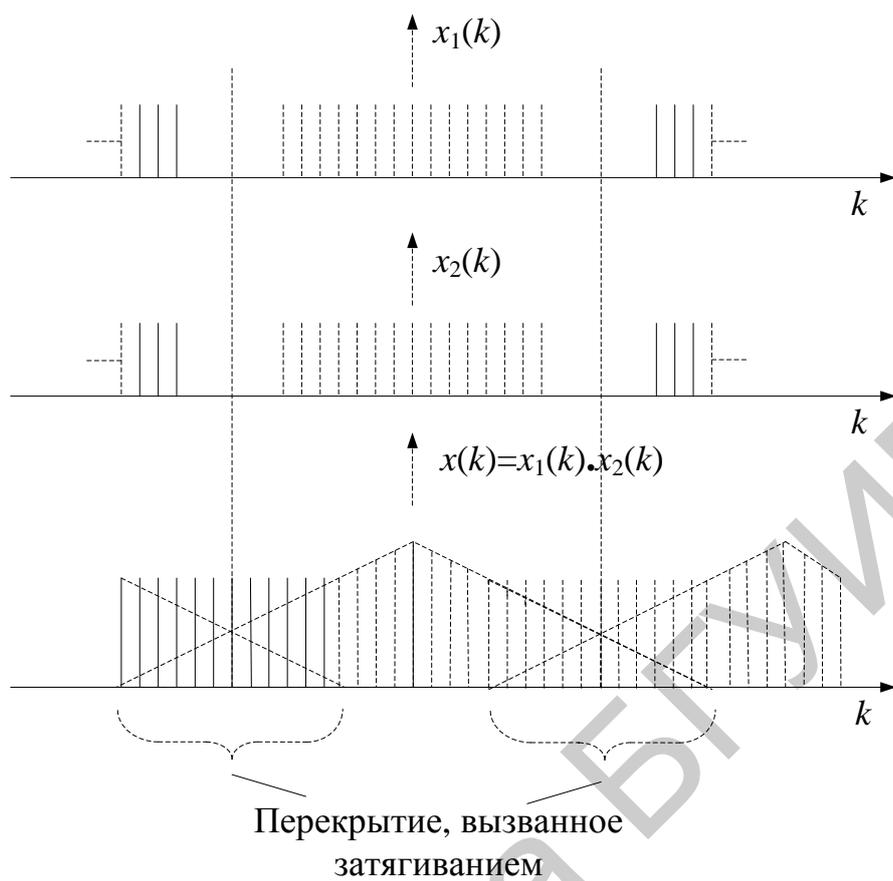


Рис. 3.1. Циклическая свертка прямоугольных импульсов с явлением затягивания

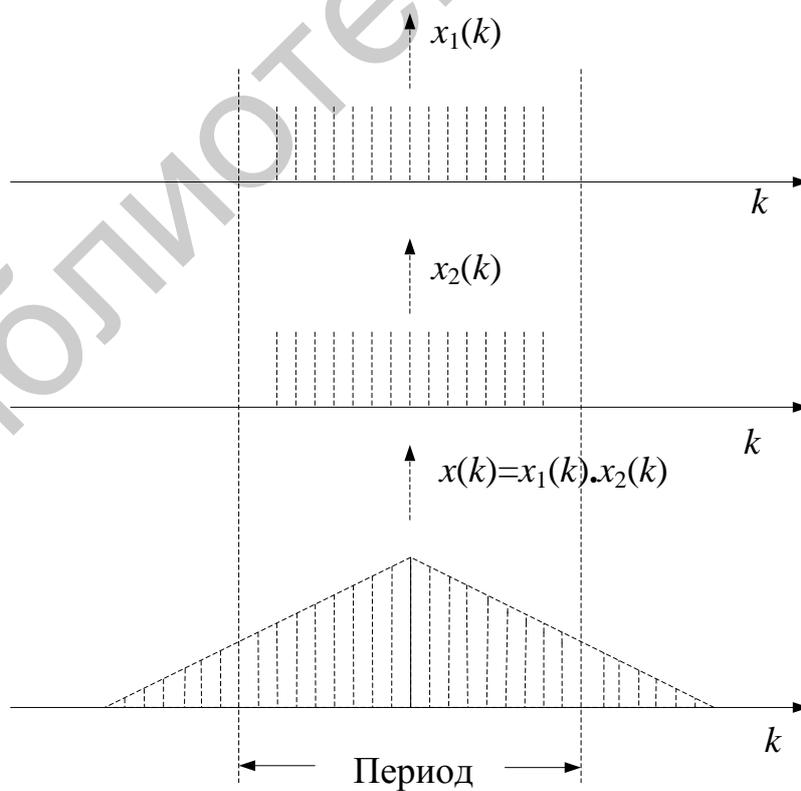


Рис. 3.2. Аперiodическая свертка прямоугольных импульсов

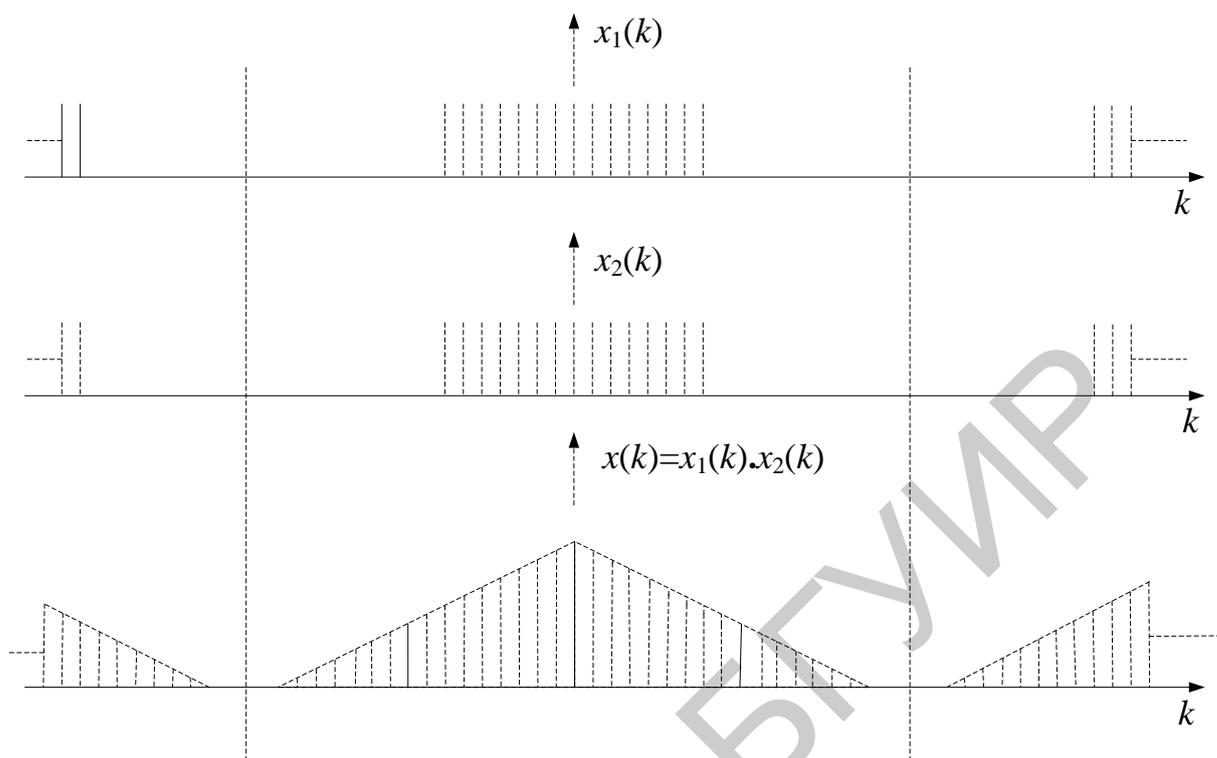


Рис. 3.3. Увеличение периода функций для предотвращения затягивания

При использовании свертки для выполнения фильтрации часто сталкиваются еще с одной трудностью. Фильтруемые последовательности обычно много длиннее относительно короткой импульсной характеристики, в результате чего для вычислений требуется чрезвычайно большая память или процесс обработки получает большое запаздывание. В этом случае можно производить свертку на основе ДПФ путем соответствующего секционирования длинных последовательностей.

3.1.2. Алгоритм вычисления свертки длинных последовательностей методом перекрытия с суммированием

Пусть $x[n]$ делится на сегменты равной длины, состоящие из N_1 точек данных. Далее требуется найти свертку сегмента с L -точечной $h[n]$ импульсной характеристикой фильтра. Чтобы результаты свертки были корректными, они должны быть посчитаны с помощью линейной свертки. Для этого необходимо дополнить каждый сегмент и импульсную характеристику фильтра нулями до длины $N = N_1 + L - 1$. Таким образом, полученный кадр из N отсчетов будет состоять из N_1 отсчетов сигнала и $L - 1$ нулевых отсчетов. После дополнения нулями обе последовательности (кадр и дополненная нулями импульсная характеристика) будут иметь одинаковую длину по N отсчетов

и можно использовать преобразование Фурье для вычисления свертки. Аналогичным образом осуществляется вычисление свертки для всех кадров.

Дополнение нулями в каждом кадре приводит к тому, что первые и последние $L-1$ отсчетов в свертке для каждого кадра будут ошибочными (в первом кадре некорректные только $L-1$ последних отсчетов). Эти ошибки устраняются путем наложения и суммирования конца предыдущего кадра свертки с началом следующего кадра свертки, причем перекрытие составляет $L-1$ точек. Аналогичная процедура делается для всех кадров.

Алгоритм вычисления свертки:

1. Задается сигнал $x[n]$ и импульсная характеристика фильтра $h[n]$ длиной L .

2. Выбирается сегмент $x_i = \{x[n], \dots, x[n] + N_1\}$ размерностью N_1 из отсчетов входного сигнала $x[n]$.

3. Образуется кадр \tilde{x}_i путем дополнения сегмента нулями до длины $N = N_1 + L - 1$.

4. Импульсная характеристика фильтра $h[n]$ дополняется нулями до длины N . Полученную импульсную характеристику обозначим \tilde{h} .

5. Вычисляется свертка для каждого кадра и импульсной характеристики, дополненной нулями, $(\tilde{x}_i \cdot \tilde{h})$ с помощью преобразования Фурье.

6. $L-1$ первых отсчетов полученной свертки накладываются и суммируются с $L-1$ последними отсчетами свертки от предыдущего кадра.

7. Процедура свертки повторяется с п. 2 для нового сегмента.

Пример 3.1. Пусть задана последовательность отсчетов сигнала $x[n] = [1, 3, 2, -3, 0, 2, -1, 0, -2, 3, -2, 1, \dots]$ и импульсной характеристики $h[n] = [1, 0, 1]$. Вычислим свертку методом «наложения-сложения». Выберем размерность сегмента $N_1 = 6$, тогда длина кадра будет равна $N = N_1 + L - 1 = 6 + 3 - 1 = 8$. Запишем первый и второй кадры: $\tilde{x}_1 = [1, 3, 2, -3, 0, 2, 0, 0]$; $\tilde{x}_2 = [-1, 0, -2, 3, -2, 1, 0, 0]$. Импульсная характеристика после дополнения нулями имеет вид: $h[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$. Числовые значения свертки двух кадров равны $y_1 = [1, 3, 3, 0, 2, -1, 0, 2]$, $y_2 = [-1, 0, -3, 3, -4, 4, -2, 1]$. После наложения и суммирования двух отсчетов получим верный результат свертки: $y[n] = [1, 3, 3, 0, 2, -1, -1, 2, -3, 3, -4, 4, -2, 1]$. Графики сверток и результирующая свертка показаны на рис. 3.4.

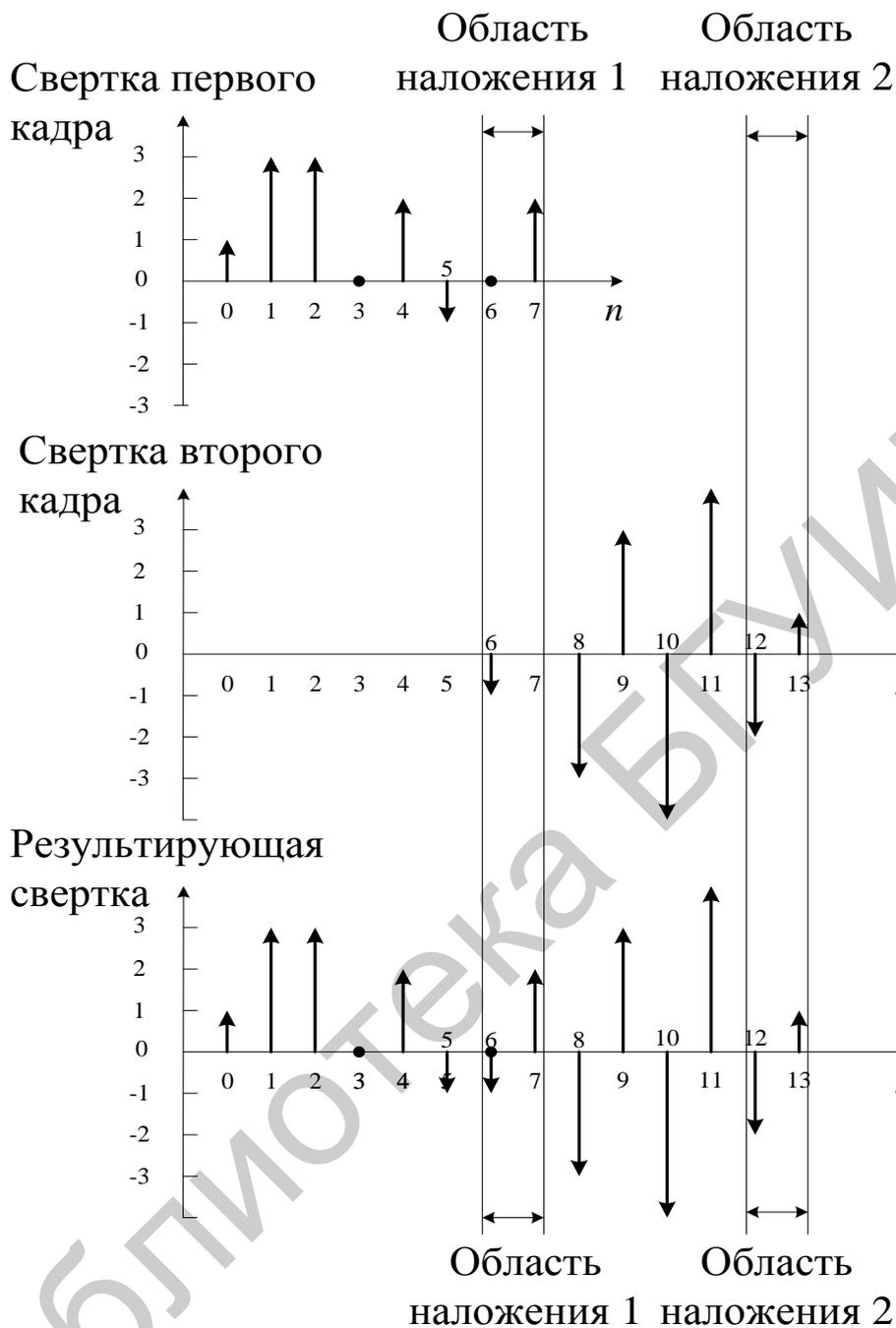


Рис. 3.4. Графики сверток и результирующая свертка

Алгоритм позволяет вычислить линейную свертку длинной последовательности через вычисление коротких сверток с помощью преобразования Фурье. Перекрытие с суммированием выполняется для всех кадров.

3.2. Методические рекомендации

3.2.1. Порядок выполнения работы

1. По варианту выбрать длину сигнала M , длину сегмента N_1 и длину импульсной характеристики фильтра L (табл. 3.1).
2. Написать программу для вычисления длинной свертки методом перекрытия с суммированием с использованием преобразования Фурье.
3. Сравнить полученные данные с другими алгоритмами вычисления свертки.

3.2.2. Предварительное задание

1. Размерность длины сигнала выбрать по варианту.
2. Написать программу вычисления линейной свертки через циклическую.
3. Построить физическую модель вычисления линейной свертки с помощью цифрового фильтра с конечной импульсной характеристикой.
4. Провести необходимые матричные вычисления сверток и убедиться в справедливости алгоритмов вычисления.

3.2.3. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Результаты моделирования алгоритмов вычисления длинной свертки.
3. Результаты расчетов предварительного задания.
4. Выводы и замечания по работе.

3.2.4. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения линейной и циклической сверток.
2. Поясните явление наложения значений, возникающее при вычислении свертки.
3. Какое свойство позволяет строить быстрые алгоритмы вычисления свертки?
4. Сравните алгоритмическую сложность вычисления свертки прямым методом и с помощью быстрого преобразования Фурье.
5. Какие особенности имеют алгоритмы вычисления длинной свертки?
6. Составьте структурную схему алгоритма вычисления длинной свертки.
7. Поясните физическую модель линейной свертки.

3.3. Варианты заданий

Таблица 3.1

Параметры свертки сигналов

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Длина сигнала M	60	63	68	58	67	62	55	59	64
Длина сегмента N	8	10	9	11	7	12	10	12	13
Длина импульсной характеристики L	8	7	5	4	8	5	6	4	5
Длина сигнала для предварительного задания	4	5	6	7	7	6	5	4	5

Лабораторная работа №4

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

Цель работы

1. Знакомство с методами спектрального анализа.
2. Получение оценки спектральной плотности мощности сигналов различными методами.
3. Исследование влияния выбранного метода спектрального анализа, типа и длины весового окна на разрешающую способность.

4.1. Краткие теоретические сведения

4.1.1. Спектральный анализ детерминированных дискретных сигналов

Назначение спектрального анализа. Классификация методов спектрального анализа

Спектральный анализ – это метод обработки сигналов, который заключается в разложении сигнала на его частотные или спектральные составляющие и оценке их характеристик – амплитуды, фазы, мощности, спектральной плотности мощности и др.

Основными методами спектрального анализа являются:

- фильтровые (методы полосового анализа);
- бесфильтровые (основанные на ДПФ);
- параметрические (на основе параметрических моделей случайных процессов).

К параметрам анализаторов спектра относят:

- число каналов анализа;
- время наблюдения или анализа (ширина окна);
- полосу анализа;
- разрешение по частоте, обратное, пропорциональное времени анализа и соответствующее разности частот двух соседних разрешаемых (разделяемых) частотных составляющих сигнала.

Структура спектрального анализатора с использованием ДПФ

Предположим, что спектр аналогового сигнала $x(t)$ сосредоточен в ограниченной полосе частот и, следовательно, может анализироваться с использованием дискретного эквивалента $x[n]$, формируемого на выходе АЦП. Параметры АЦП выбираются таким образом, чтобы эффекты наложения периодических копий спектра и шумы квантования по уровню могли

не учитываться. Кроме того, будем полагать, что параметры гармонического сигнала (амплитуда, фаза и частота) не изменяются во времени.

Спектральный анализ таких сигналов может быть выполнен с помощью дискретного преобразования Фурье. Причем для анализа используется взвешенная входная последовательность $g[n] = x[n]w[n]$, которая определяется как произведение дискретного сигнала $x[n]$ на некоторую весовую функцию $w[n]$ на конечном интервале N . В качестве средства оценивания спектра используется R -точечное ДПФ или быстрое преобразование Фурье (БПФ) ($R \geq N$) (рис. 4.1).

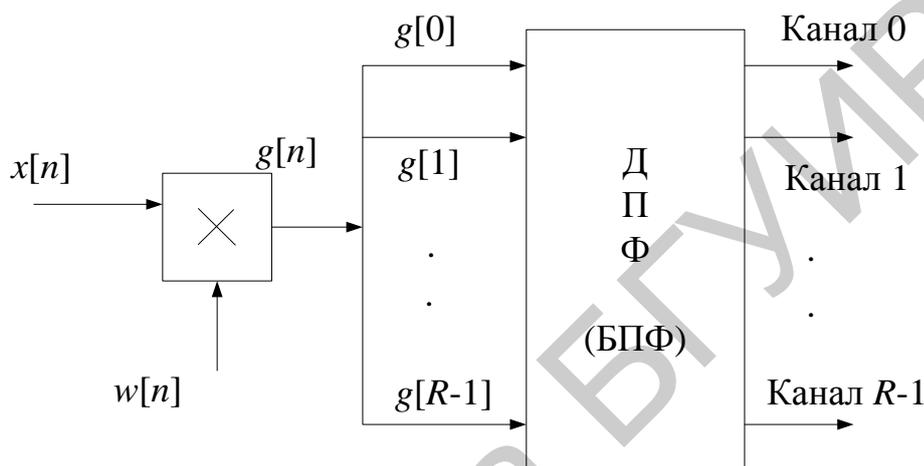


Рис. 4.1. Оценка спектра с использованием ДПФ

Частотная характеристика одного канала ДПФ

Рассмотрим формулу ДПФ в следующем виде:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \left| e^{j2\pi k} = 1 \right| = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N}(N-n)}. \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) для ДПФ представляет собой дискретную свертку и один из отсчетов спектра является выходным сигналом цифрового фильтра, импульсная характеристика которого определяется выражением

$$h_k(n) = \exp(j2\pi \cdot \frac{k}{N} \cdot n), k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.2)$$

где k – номер частотного отсчета.

Передаточная функция такого фильтра является Z -преобразованием от импульсной характеристики:

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) \cdot z^{-n} = \left| \sum_{n=0}^N b_0 q^n = b_0 \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1} \right| = \frac{1 - z^{-N}}{1 - \exp(j2\pi \frac{k}{N}) \cdot z^{-1}}. \quad (4.3)$$

Частотную характеристику фильтра получим в результате использования подстановки $z = e^{j\omega T}$:

$$K_k(j\omega) = H_k(e^{j\omega T}) = \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}} e^{-j\omega T}}. \quad (4.4)$$

После выполнения преобразований АЧХ такого фильтра примет следующий вид:

$$|K_k(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\pi N \frac{\omega - \omega_k}{\omega_D})}{\sin(\pi \frac{\omega - \omega_k}{\omega_D})} \right|, \quad (4.5)$$

где $\omega_k = \frac{k}{N} \omega_D$ – частота настройки k -го фильтра; $\omega_D = \frac{2\pi}{T}$ – частота дискретизации входного сигнала.

График АЧХ одного из каналов ДПФ приведен на рис. 4.2. Как видно из графика, АЧХ фильтра одного канала ДПФ имеет максимальный уровень боковых лепестков, равный

$$0,5 \approx -13,5 \text{ дБ}.$$

Ширина главного лепестка АЧХ канала ДПФ определяет разрешающую способность спектрального анализа и определяется выражением

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N \cdot T}.$$

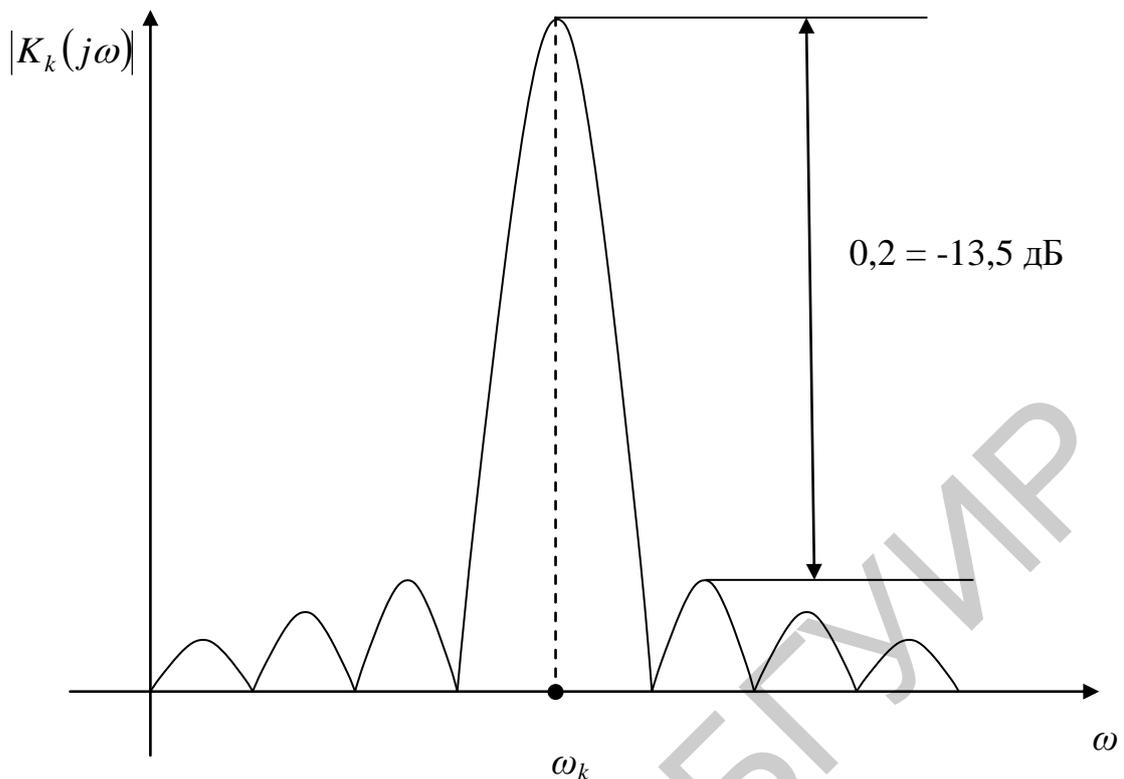


Рис. 4.2. АЧХ одного из каналов ДПФ

Явление растекания спектра

При вводе понятия ДПФ предполагалось, что последовательность анализируемых отсчетов периодически продолжается за пределами окна анализа. Если значения начальных и конечных отсчетов сигнала сильно отличаются, то при периодическом продолжении сигналов возникают сильные скачки на стыках окон. Это приводит к явлению растекания спектра.

Пусть вычисляется спектр дискретного гармонического сигнала:

$$x(n) = A \cos(\omega \cdot n \cdot T + \varphi). \quad (4.6)$$

Если анализируемая последовательность будет содержать целое число периодов гармонического сигнала, т. е. $\frac{N\omega T}{2\pi}$ – целое число, то периодически продолженный сигнал не содержит скачков и характеризуется только двумя спектральными отсчетами, отличными от нуля:

$$X(k) = \begin{cases} \frac{AN}{2} e^{j\phi}, & k = \frac{\omega T}{2\pi} N, \\ \frac{AN}{2} e^{-j\phi}, & k = \left(1 - \frac{\omega T}{2\pi}\right) N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, ДПФ дискретного сигнала аналогично спектру непрерывного гармонического сигнала отличается от нуля для двух значений k , символизирующих положительную и отрицательную частоту.

Однако если величина $\frac{N\omega T}{2\pi}$ не является целым числом, то дискретный спектр становится более сложным, так как в этом случае периодически продолженная последовательность не может являться отсчетами непрерывной синусоиды. Поэтому в дискретном спектре появляются дополнительные составляющие.

Примерные графики дискретного гармонического сигнала и модуля его спектра для случаев целого и нецелого числа периодов в пределах окна анализа приведены на рис. 4.3.

Явление растекания спектра можно пояснить и с использованием спектров дискретизированных синусоид с различными частотами, спектры которых показаны на рис. 4.4. Ранее было получено, что спектры дискретизированных сигналов представляют собой периодические непрерывные функции. Однако в случае целого числа периодов синусоиды в пределах окна анализа все дискретные значения отсчетов ДПФ попадают на границы между боковыми лепестками. При нецелом числе периодов синусоиды в пределах окна анализа этого не происходит.

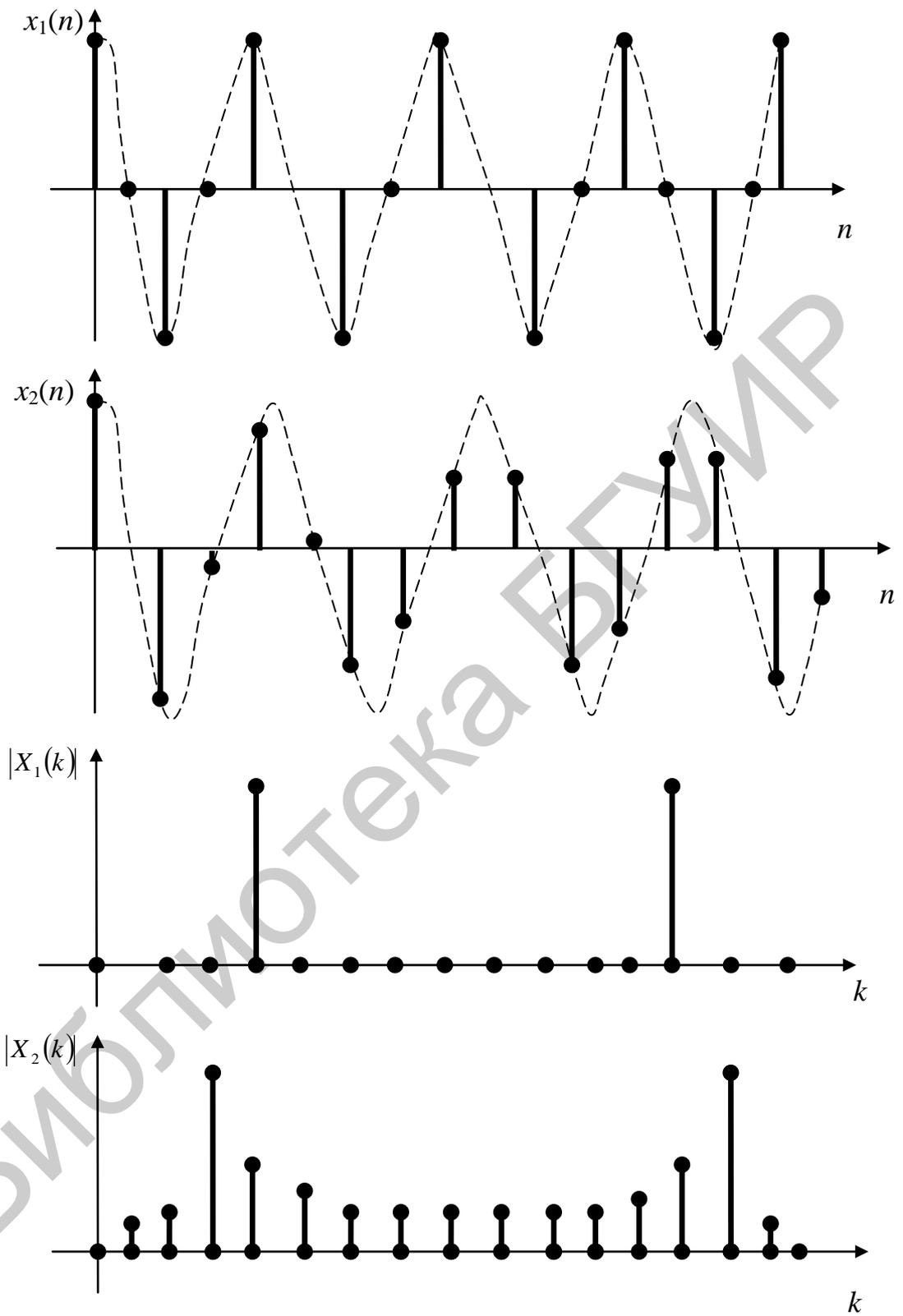


Рис. 4.3. Дискретный гармонический сигнал и его спектры

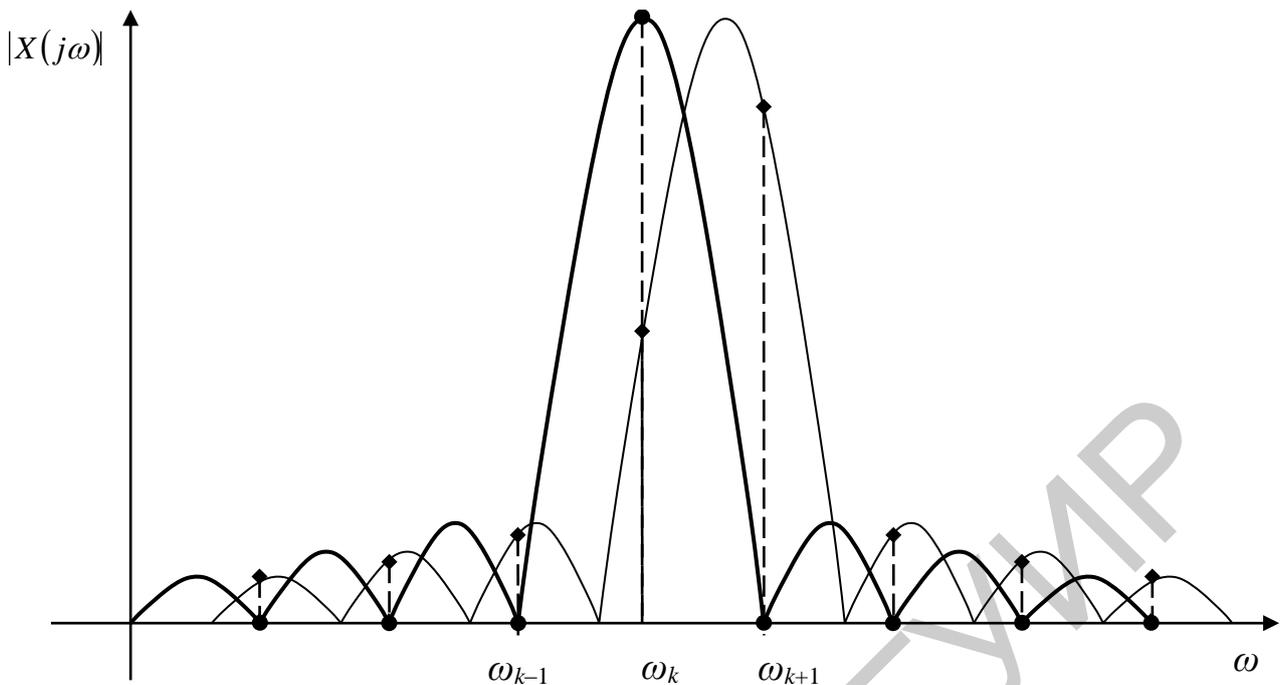


Рис. 4.4. Спектры дискретизированных гармонических сигналов

Использование весовых функций

Для уменьшения явления растекания спектра при спектральном анализе с использованием ДПФ применяют весовые функции. В этом случае перед расчетом ДПФ сигнал $x(n)$ умножается на весовую функцию $w(n)$. При этом формула ДПФ изменится следующим образом:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (4.7)$$

Используемая весовая функция является спадающей к краям анализируемого сегмента времени. Это приводит к ослаблению эффектов, связанных со скачком сигнала при его периодическом продолжении за пределами сегмента анализа.

Использование весовой функции приводит к уменьшению уровня боковых лепестков частотных характеристик, соответствующих отсчетам ДПФ. Выражение для частотной характеристики в этом случае должно учитывать весовую функцию:

$$K_k(j\omega) = H_k(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) \cdot w(n) \cdot z^{-n}. \quad (4.8)$$

Уменьшение уровня боковых лепестков частотных характеристик фильтров, соответствующих отдельным каналам ДПФ, достигается ценой расширения центрального лепестка частотной характеристики (рис. 4.5).

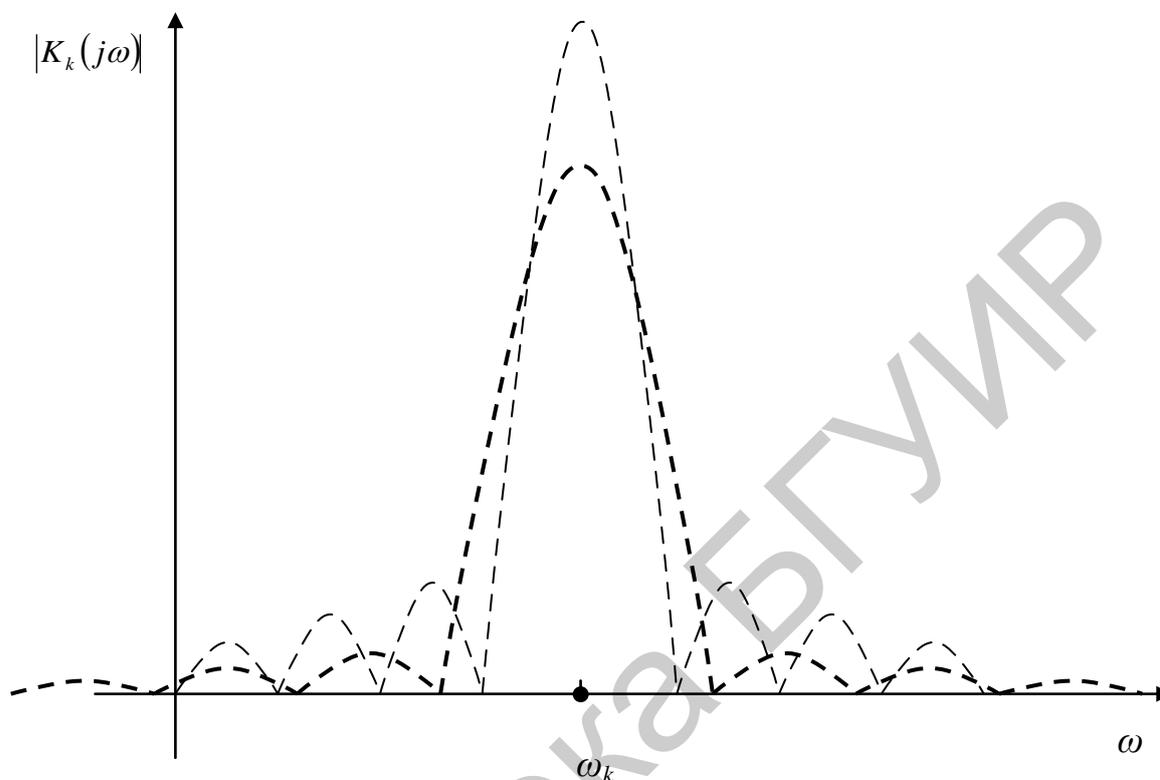


Рис. 4.5. АЧХ одного из каналов ДПФ до и после использования весовой обработки

Наиболее известны следующие весовые функции:

- Хэмминга: $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N}$, $\delta_{\text{бл}} = -43$ дБ;
- Блэкмана: $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N}$, $\delta_{\text{бл}} = -58$ дБ.

4.1.2. Периодограммная оценка спектральной плотности мощности дискретного случайного процесса

Анализ спектров случайных процессов имеет свои особенности. Во-первых, простое вычисление спектра с использованием ДПФ не представляет большого интереса, так как получается лишь спектр единственной случайной реализации процесса. Поэтому для спектрального анализа случайных сигналов необходимо использовать усреднение спектра. Во-вторых, использование среднего значения спектральной плотности сигнала по формуле ДПФ неприемлемо, так как для случайных сигналов с нулевым средним среднее значение спектральной плотности сигнала равно нулю:

$$E\{X(k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} E\{x(n)\} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} k \cdot n} = |E\{x(n)\} = 0| = 0.$$

Таким образом, усредненное значение спектральной плотности сигнала не несет никакой информации о случайной составляющей случайного процесса. По этой причине при спектральном анализе случайных сигналов рассматривают спектральную плотность мощности (СПМ) случайного процесса.

Спектральная плотность мощности дискретного случайного процесса, полученная с использованием ДПФ для N отсчетов одной реализации, с точностью до несущественного постоянного множителя может быть записана следующим образом:

$$S(k) = \frac{T}{N} |X(k)|^2 = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} k \cdot n} \right|^2. \quad (4.9)$$

После перехода от номера частотного дискрета ДПФ к аргументу частоты можно получить исходную форму периодограммной оценки СПМ:

$$S(\omega) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T} \right|^2. \quad (4.10)$$

Недостатком периодограммной оценки СПМ записанного вида для одного фрагмента данных является ее статистическая несостоятельность, так как отсутствует операция усреднения для вычисления математического ожидания. Поэтому полученная периодограмма будет иметь сильно изрезанный вид. Кроме того, наблюдается известное явление «размывания» спектра.

Для усреднения и сглаживания исходной периодограммной оценки известны три метода: Даньелла, Барлетта, Уэлча.

Метод Даньелла основан на усреднении значений СПМ в пределах смежных спектральных частот:

$$S_D(\omega_i) = \frac{1}{2P+1} \sum_{n=i-P}^{i+P} S(\omega_n), \quad (4.11)$$

где $\omega_i = \frac{i}{K \cdot T}$, $0 \leq k \leq K-1$ – сетка частот; $2P+1$ – количество точек усреднения; $N = K \cdot (2P+1)$.

Таким образом, происходит уменьшение количества просматриваемых частот от максимального значения N к меньшему количеству $K = \frac{N}{2P+1}$ за счет объединения соседних дискрет.

В соответствии с *методом Барлетта* сглаживание обеспечивается за счет усреднения значений СПМ, полученных для P коротких неперекрывающихся временных сегментов длительностью D :

$$x_p(n) = x(pD + n),$$

где $0 \leq n \leq D - 1$ – номер отсчета в пределах каждого сегмента.

В сумме все сегменты составляют исходную последовательность длительностью N . Соответственно, периодограммная оценка по методу Барлетта описывается выражением

$$S_B(\omega_i) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} S_p(\omega_i), \quad (4.12)$$

где $S_p(\omega) = \frac{T}{D} \left| \sum_{n=0}^{D-1} x_p(n) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot nT} \right|^2$ – выборочная СПМ.

Периодограмма Уэлча использует модифицированную методику Барлетта за счет применения весовой функции в пределах каждого сегмента и использования перекрывающихся сегментов. Весовая функция ослабляет влияние боковых лепестков за счет некоторого ухудшения разрешающей способности. Перекрывание сегментов позволяет увеличить число усредняемых сегментов и уменьшить результирующую дисперсию оценки СПМ. Уэлчем разработана эффективная вычислительная процедура для реализации метода на основе использования БПФ. Метод Уэлча является самым распространенным методом спектрального анализа.

Метод Уэлча организуется следующим образом:

1. Вектор отсчетов сигнала делится на перекрывающиеся сегменты (как правило, перекрытие составляет 50 %).
2. Каждый сегмент умножается на используемую весовую функцию.
3. Для взвешенных сегментов вычисляются модифицированные периодограммы (вместо числа отсчетов N в знаменателе используют сумму квадратов модулей коэффициентов окна):

$$S(\omega) = \frac{T}{\sum_{k=0}^{N-1} |w(k)|^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(k) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T} \right|^2. \quad (4.13)$$

4. Периодограммы всех сегментов усредняются.

4.2. Методические рекомендации

4.2.1. Задание для лабораторной работы

1. Рассчитать и построить графики дискретных сигналов, содержащих 16 отсчетов гармонических сигналов с периодами, равными 4 и 6 отсчетам. Сделать выводы о возможности скачков в периодически продолженных сигналах.

2. Рассчитать ДПФ для двух сформированных дискретных сигналов, используя функцию *fft*. Построить графики модулей полученных ДПФ. Сделать выводы о явлении растекания спектра.

3. Рассчитать и построить графики дискретных сигналов, полученных в п. 1 и подвергнутых весовой обработке с использованием весового окна Ханна (функция *hann*).

4. Рассчитать ДПФ сформированных сигналов, подвергнутых весовой обработке с использованием весового окна Ханна (функция *hann*). Построить графики модулей полученных ДПФ. Сделать выводы о влиянии весового окна на характеристики полученного спектра.

5. Сформировать авторегрессионный случайный процесс, используя передаточную характеристику фильтра:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}},$$

где b_0 определяет размах процесса; a_1 задает положение центральной частоты фильтра; a_2 определяет ширину пропускания фильтра (значения a_1 и a_2 выбираются согласно варианту (табл. 4.1)).

Формирующим процессом является дискретный белый гауссовский шум с единичной дисперсией, частотой дискретизации 8 кГц и длительностью 1 с.

6. Получить и построить график периодограммной оценки спектра полученного случайного сигнала с использованием функции *periodogram*.

7. Получить и построить график оценки спектра полученного случайного сигнала по методу Уэлча с использованием функции *pwelch*. Сделать выводы о полученных в пп. 6 и 7 спектрах.

4.2.2. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Исходные данные.
3. Результаты моделирования (графики).
4. Выводы по результатам моделирования (по каждому пункту задания, кроме 1-го).

4.3. Варианты заданий

Таблица 4.1

Параметры авторегрессионного случайного процесса

Параметр	Задания по вариантам					
	1	2	3	4	5	6
a_1	-1	-0,6	-0,2	0,2	0,4	0,7
a_2	0,8	0,7	0,7	0,7	0,75	0,75

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник / И. С. Гоноровский, М. П. Демин. – М. : Радио и связь, 1994. – 480 с.
2. Голд, Б. Цифровая обработка сигналов / Б. Голд, Ч. Рэйдер ; под ред. А. М. Трахтмана ; пер. с англ. – М. : Сов. радио, 1973. – 368 с.
3. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; под ред. Ю. И. Александрова ; пер. с англ. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
4. Оппенгейм, А. В. Цифровая обработка сигналов / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер. – М. : Связь, 1979. – 416 с.
5. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – СПб. : БХВ – Петербург, 2011. – 768 с.
6. Основы цифровой обработки сигналов. Курс лекций / А. И. Солонина, [и др.]. – СПб. : БХВ – Петербург, 2005. – 594 с.
7. Солонина, А. И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB / А. И. Солонина, С. М. Арбузов. – СПб. : БХВ – Петербург, 2008. – 816 с.
8. Бондарев, В. Цифровая обработка сигналов: методы и средства / В. Бондарев, Г. Трестер, В. Черняга. – Харьков : Конус, 2001. – 398 с.
9. Дьяконов, В. П. Matlab 6.5 SP 1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2005. – 576 с.
10. Потемкин, В. Г. Система MATLAB 5 для студентов / В. Г. Потемкин, П. И. Рудаков. – М. : Диалог – МИФИ, 1999. – 448 с.

Учебное издание

**МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

**Давыденко Игорь Николаевич
Давыдов Игорь Геннадьевич
Дубновицкая Татьяна Александровна
Цурко Александр Владимирович**

МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**Редактор М. А. Зайцева
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная правка, оригинал-макет Е. Д. Стенусь**

Подписано в печать 00.00.2016. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,3. Уч.-изд. л. 4,3. Тираж 100 экз. Заказ 223.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014,
220013, Минск, П. Бровки, 6

Библиотека БГУИР

Библиотека БГУИР