П. А. Киндрук

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ, СВОЙСТВА КОТОРОЙ ИЗМЕНЯЮТСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ.

Разработана программа, позволяющая находить зависимость фазовой скорости от частоты волны при ее распространении в среде с периодическим законом изменения диэлектрической проницаемости.

Постановка задачи

При прохождении волны с частотой W в среде с периодом d волновое поле может быть представлено в виде бесконечной суммы пространственных гармоник, фазовые скорости которых определяются по формуле:

$$\beta_{\phi_n} = \frac{Wd}{|\phi_0 + 2\pi n|}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (1)$$

где $0 < \phi_0 < \pi$ - набег фазы на период, $\phi_0 = \frac{Wd}{\beta_{\phi_0}}$, β_{ϕ_0} – фазовая скорость основной гармоники волны.

Зная величину ϕ_0 по формуле (1) вычисляются фазовые скорости всех составляющих гармоник.

Для нахождения значения ϕ_0 используем теорему Флоке, согласно которой компоненты волны в такой среде удовлетворяют граничному условию Флоке вида:

$$\vec{E}(z+d) = \vec{E}(z)e^{-j\phi_0}. \qquad (2)$$

$$\vec{B}(z+d) = \vec{B}(z)e^{-j\phi_0}. \qquad (3)$$

где $e^{-j\phi_0} = \cos(\phi_0) - j\sin(\phi_0)$.

В результате получаем, что задача нахождения ϕ_0 для горизонтально поляризованной волны сводится к решению (требуется найти не нулевое решение) уравнения (4) на одном периоде 0<z<d при граничных условиях (5), вытекающих из теоремы Флоке(формулы (2) и (3)):

$$\frac{d^2u}{dz^2} + W^2\varepsilon(z)u = 0, \qquad (4)$$

$$u(d) = u(0)e^{-j\phi_0}, \frac{du}{dz}(d) = \frac{du}{dz}(0)e^{-j\phi_0}, \qquad (5)$$

$$\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon_m \sin(\pi\frac{z}{d})^2.$$

Методика решения задачи

Решать уравнение (4) будем методом сеток. После аппроксимации производных в уравнении (4) получаем однородную систему линейных уравнений $A\vec{u} = 0$. Матрица A имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} e^{-j\phi_0} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & b_2 & c_3 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & .. & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_n & b_n & c_n \\ -e^{-j\phi_0} & e^{-j\phi_0} & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

здесь $a_i = 1, c_i = 1, b_i = -2 + W^2\varepsilon(z)$. Первое и последнее уравнения получены из граничных условий (5).

Нас интересует ненулевое решение однородной системы. Оно существует, если определитель матрицы равен нулю. В этом случае одно из уравнений может быть выражено линейной комбинацией остальных уравнений системы. Найдем такое значение ϕ_0 из диапазона $0 < \phi_0 < \pi$, при котором определитель матрицы равен нулю: $Det(A(\phi_0)) = 0$.

Разработана программа, позволяющая при заданных d, ε_m, W находить фазовые скорости всех составляющих волновое поле гармоник. На рис. 1 представлены рассчитанные зависимости от частоты основной и первой обратной ($n = 0, n = -1$) гармоник.

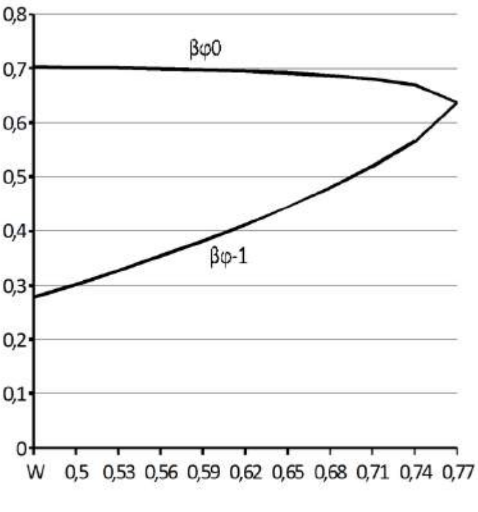

Рис. 1. Графики $\beta_{\phi_0}(W)$ и $\beta_{\phi_{-1}}(W)$ при $d = 2,5$, $\varepsilon_m = 2$

Киндрук Павел Алексеевич, студент кафедры информатики и технологий программирования, kinpa200296@yandex.ru.

Научный руководитель: Синицын Анатолий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительных методов и программирования, sinitsyn@cosmostv.by.

Библиотека БГУИР